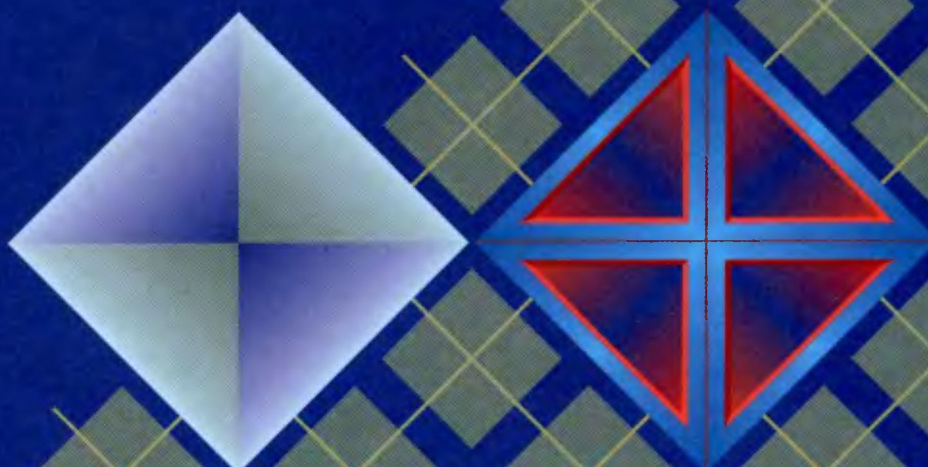
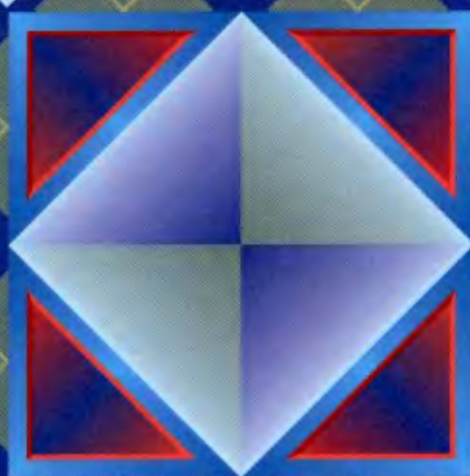


ГЕОМЕТРИЯ



7



9

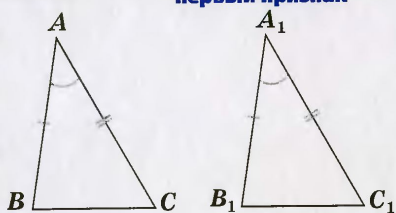
8



ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

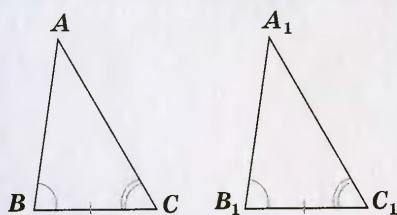
**ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА
ТРЕУГОЛЬНИКОВ**

первый признак



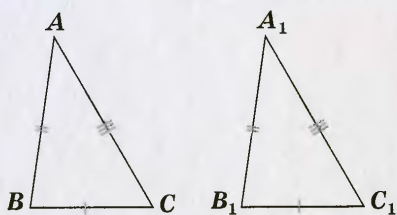
Если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$,
то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

второй признак



Если $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$,
то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

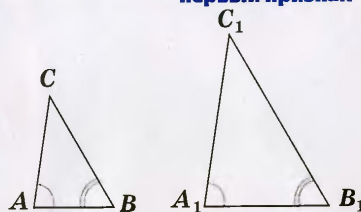
третий признак



Если $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$,
то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

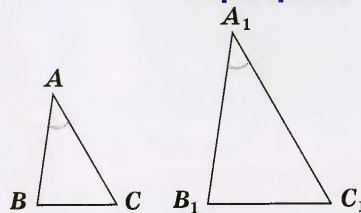
**ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ
ТРЕУГОЛЬНИКОВ**

первый признак



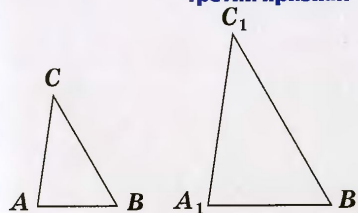
Если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$,
то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

второй признак



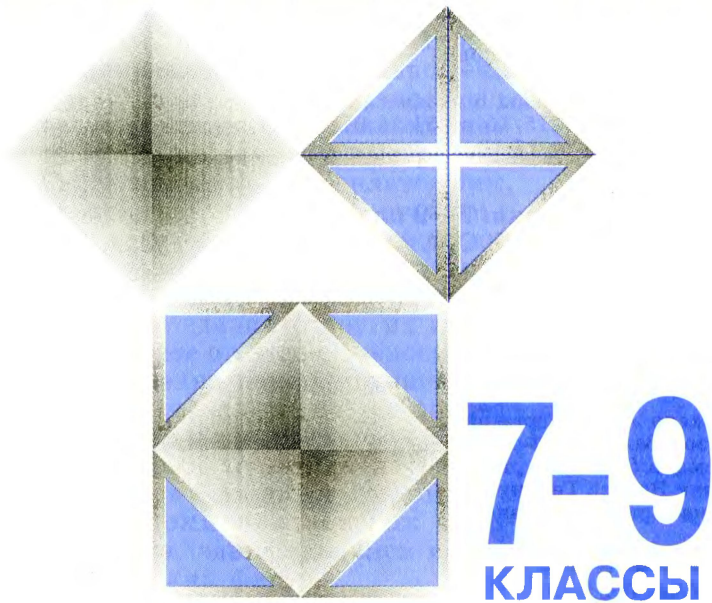
Если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$,
то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

третий признак



Если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$,
то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

ГЕОМЕТРИЯ



**Учебник
для общеобразовательных
учреждений**

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

20-е издание

Москва «Просвещение» 2010

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Г36



Авторы: Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк,
И. И. Юдина

Издание подготовлено под научным руководством
академика А. Н. Тихонова

На учебник получены положительные заключения Российской академии
наук (№ 10106-5215/15 от 31.10.07) и Российской академии образования
(№ 01-212/5/7д от 11.10.07)

Геометрия. 7—9 классы : учеб. для общеобразоват. уч-
Г36 реждений / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев
и др.]. — 20-е изд. — М. : Просвещение, 2010. — 384 с. :
ил. — ISBN 978-5-09-023915-8.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

Учебное издание

Атанасян Левон Сергеевич
Бутузов Валентин Федорович
Кадомцев Сергей Борисович
Позняк Эдуард Генрихович
Юдина Ирина Игоревна

ГЕОМЕТРИЯ 7—9 КЛАССЫ

Учебник для общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*. Редактор *Л. В. Кузнецова*. Младший редактор *Е. А. Андреенкова*. Художники *В. Е. Валериус, Н. Ю. Панкевич, В. А. Андрианов, Е. В. Согонова, Е. Л. Авакова, М. Ю. Серебряков, В. Е. Киселев, О. П. Богомолова*. Художественный редактор *О. П. Богомолова*. Компьютерная графика *М. Е. Аксеновой*. Компьютерная верстка *О. С. Ивановой*. Технический редактор *Н. А. Киселева*. Корректоры *Н. В. Бурдина, О. В. Крупенко, О. Н. Леонова, И. Б. Окунева, А. В. Рудакова, Н. Д. Цухай*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 20.04.10. Формат 60×90^{1/16}. Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBookC. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 20,29+0,42 форз. Доп. тираж 150 000 экз. Заказ 1947.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Открытое акционерное общество «Тверской ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат детской литературы им. 50-летия СССР». 170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, 46. ☎

ISBN 978-5-09-023915-8

- © Издательство «Просвещение», 1990
- © Издательство «Просвещение», 2007,
с изменениями
- © Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2004
Все права защищены

Дорогие семиклассники!

Вы начинаете изучать новый предмет — геометрию и будете заниматься ею пять лет. Что это такое — геометрия?

Геометрия — одна из самых древних наук, она возникла очень давно, еще до нашей эры. В переводе с греческого слово «геометрия» означает «землемерие» («гео» — по-гречески земля, а «метрео» — мерить). Такое название объясняется тем, что зарождение геометрии было связано с различными измерительными работами, которые приходилось выполнять при разметке земельных участков, проведении дорог, строительстве зданий и других сооружений. В результате этой деятельности появились и постепенно накапливались различные правила, связанные с геометрическими измерениями и построениями. Таким образом, геометрия возникла на основе практической деятельности людей, а в дальнейшем сформировалась как самостоятельная наука, занимающаяся изучением геометрических фигур.

На уроках математики вы познакомились с некоторыми геометрическими фигурами и представляете себе, что такое точка, прямая, отрезок, луч, угол (рис. 1), как они могут быть расположены относительно друг друга. Вы знакомы с такими фигурами, как треугольник, прямоугольник, окружность, круг и др. (рис. 2); знаете, как измеряются отрезки с помощью линейки с миллиметровыми делениями и как измеряются углы с помощью транспортира. Но все это лишь самые первые геометрические сведения. Теперь вам предстоит расширить и углубить ваши знания о геометрических фигурах. Вы познакомитесь с новыми фигурами и со многими важными и интересными свойствами уже известных вам фигур. Вы узнаете о том, как используются свойства геометрических фигур в практической деятельности. Во всем этом вам поможет учебник и, конечно, учитель.

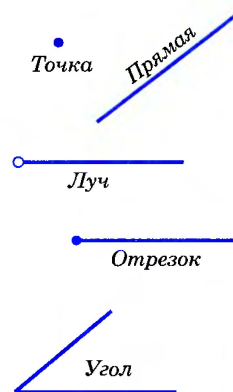


Рис. 1



Рис. 2

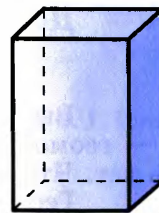
Школьный курс геометрии делится на **планиметрию** и **стереометрию**. В планиметрии рассматриваются свойства фигур на плоскости. Примерами таких фигур являются отрезки, треугольники, прямоугольники. В стереометрии изучаются свойства фигур в пространстве, таких, как параллелепипед, шар, цилиндр (рис. 3). Мы начнем изучение геометрии с планиметрии.

В процессе изучения геометрии Вы будете доказывать **теоремы** и решать **задачи**. Что такое «теорема» и что значит «доказать теорему» — об этом вы скоро узнаете. Ну, а что такое задача — вам известно, на уроках математики вы решали разные задачи.

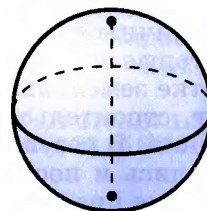
В нашем учебнике геометрии много задач: есть задачи и практические задания к каждому параграфу, дополнительные задачи к каждой главе и, наконец, задачи повышенной трудности. Основными являются задачи к параграфу. Более трудные задачи отмечены звездочкой. В конце книги к задачам даны ответы и указания.

Всем, кто проявит интерес к геометрии, кому понравится решать задачи и доказывать теоремы, мы советуем порешать не только обязательные задачи, но и задачи со звездочкой, дополнительные задачи и задачи повышенной трудности. Решать такие задачи непросто, но интересно. Не всегда удастся сразу найти решение. В таком случае не унывайте, а проявите терпение и настойчивость. Радость от решения трудной задачи будет вам наградой за упорство. Не бойтесь заглядывать вперед, читать те параграфы, которые еще не проходили в классе. Задавайте вопросы учителю, товарищам, родителям.

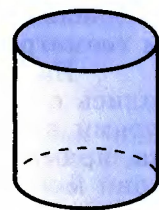
Доброго вам пути, ребята!



Прямоугольный параллелепипед



Шар



Цилиндр

Рис. 3

Глава I

Начальные геометрические сведения

§ 1

Прямая и отрезок

1 Точки, прямые, отрезки

Вспомним, что нам известно о точках и прямых. Мы знаем, что для изображения прямых на чертеже пользуются линейкой (рис. 4), но при этом можно изобразить лишь часть прямой, а всю прямую мы представляем себе простирающейся бесконечно в обе стороны.

Обычно прямые обозначают малыми латинскими буквами, а точки — большими латинскими буквами. На рисунке 5 изображены прямая a и точки A , B , C и D . Точки A и B лежат на прямой a , а точки C и D не лежат на этой прямой. Можно сказать, что прямая a проходит через точки A и B , но не проходит через точки C и D . Отметим, что через точки A и B нельзя провести другую прямую, не совпадающую с прямой a . Вообще,

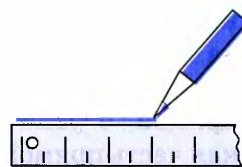
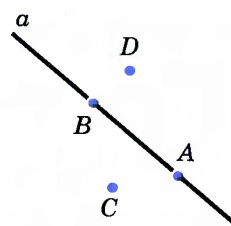


Рис. 4



Прямая и точки

Рис. 5

через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну¹.

Рассмотрим теперь две прямые. Если они имеют общую точку, то говорят, что эти прямые пересекаются. На рисунке 6 прямые a и b пересекаются в точке O , а прямые p и q не пересекаются. Две прямые не могут иметь двух и более общих точек. В самом деле, если бы две прямые имели две

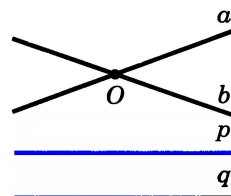


Рис. 6

¹Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки», «три точки», «две прямые» и т. д., будем считать, что эти точки, прямые различны.

общие точки, то каждая из прямых проходила бы через эти точки. Но через две точки проходит только одна прямая. Таким образом, можно сделать вывод: **две прямые либо имеют только одну общую точку, либо не имеют общих точек.**

Прямую, на которой отмечены две точки, например A и B , иногда обозначают двумя буквами: AB или BA . Для краткости вместо слов «точка A лежит на прямой a » используют запись $A \in a$, а вместо слов «точка B не лежит на прямой a » — запись $B \notin a$.

На рисунке 7, *а* выделена часть прямой, ограниченная двумя точками. Такая часть прямой называется **отрезком**. Точки, ограничивающие отрезок, называются его **концами**. На рисунке 7, *б* изображен отрезок с концами A и B . Такой отрезок обозначается AB или BA . Отрезок AB содержит точки A и B и все точки прямой AB , лежащие между A и B .

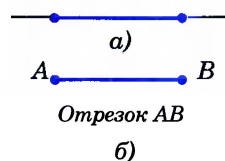


Рис. 7

2 Провешивание прямой на местности

Решим такую задачу: с помощью данной линейки построить отрезок более длинный, чем сама линейка. С этой целью приложим к листу бумаги линейку, отметим точки A и B и какую-нибудь точку C , лежащую между A и B (рис. 8, *а*). Затем передвинем линейку вправо так, чтобы ее левый конец оказался около точки C , и отметим точку D около правого конца линейки (рис. 8, *б*). Точки A , B , C и D лежат на одной прямой. Если мы проведем теперь отрезок AB , а затем отрезок BD , то получим отрезок AD , более длинный, чем линейка.

Аналогичный прием используется для «проведения» длинных отрезков прямых на местности. Этот прием заключается в следующем. Сначала отмечают какие-ни-

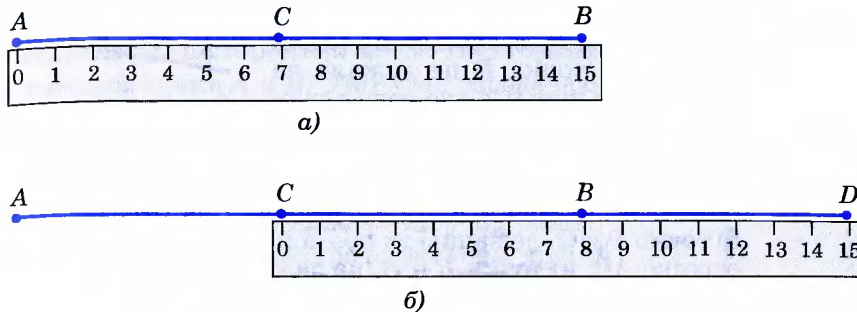


Рис. 8

будь точки A и B . Для этой цели используют две вехи — шесты длиной около 2 м, заостренные на одном конце для того, чтобы их можно было воткнуть в землю. Третью веху ставят так, чтобы вехи, стоящие в точках A и B , закрывали ее от наблюдателя, находящегося в точке A (точка C на рисунке 9). Следующую веху ставят так, чтобы ее закрывали вехи, стоящие в точках B и C , и т. д.

Описанный прием называется **провешиванием** прямой (от слова «веха»). Он широко используется на практике, например при рубке лесных просек, при прокладывании трассы шоссейной или железной дороги, линий высоковольтных передач и т. д.

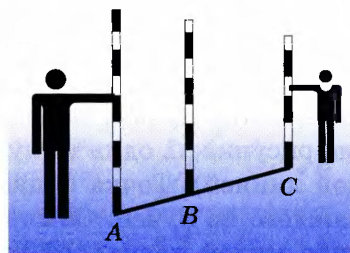


Рис. 9

Практические задания

- 1 Проведите прямую, обозначьте ее буквой a и отметьте точки A и B , лежащие на этой прямой, и точки P , Q и R , не лежащие на ней. Опишите взаимное расположение точек A , B , P , Q , R и прямой a , используя символы \in и \notin .
- 2 Отметьте три точки A , B и C , не лежащие на одной прямой, и проведите прямые AB , BC и CA .
- 3 Проведите три прямые так, чтобы каждые две из них пересекались. Обозначьте все точки пересечения этих прямых. Сколько получилось точек? Рассмотрите все возможные случаи.

- 4 Отметьте точки A, B, C, D так, чтобы точки A, B, C лежали на одной прямой, а точка D не лежала на ней. Через каждые две точки проведите прямую. Сколько получилось прямых?
- 5 Проведите прямую a и отметьте на ней точки A и B . Отметьте: а) точки M и N , лежащие на отрезке AB ; б) точки P и Q , лежащие на прямой a , но не лежащие на отрезке AB ; в) точки R и S , не лежащие на прямой a .
- 6 Проведите прямую и отметьте на ней три точки. Сколько отрезков получилось на прямой?
- 7 На рисунке 10 изображена прямая, на ней отмечены точки A, B, C и D . Назовите все отрезки: а) на которых лежит точка C ; б) на которых не лежит точка B .

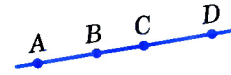


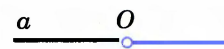
Рис. 10

§ 2

Луч и угол

3 Луч

Проведем прямую a и отметим на ней точку O (рис. 11). Эта точка разделяет прямую на две части, каждая из которых называется **лучом, исходящим из точки O** (на рисунке 11 один из лучей выделен цветной линией). Точка O называется **началом** каждого из лучей. Обычно луч обозначают либо малой латинской буквой (например, луч h на рисунке 12, а), либо двумя большими латинскими буквами, первая из которых обозначает начало луча, а вторая — какую-нибудь точку на луче (например, луч OA на рисунке 12, б).



Точка O разделяет прямую на два луча

Рис. 11

4 Угол

Напомним, что **угол** — это геометрическая фигура, которая состоит из точки и двух лучей, исходящих из этой точки. Лучи называются **сторонами угла**, а их общее начало — **вершиной угла**.



Луч h

а)



Луч OA

б)

Рис. 12

На рисунке 13 изображен угол с вершиной O и сторонами h и k . На сторонах отмечены точки A и B . Этот угол обозначают так: $\angle hk$, или $\angle AOB$, или $\angle O$.

Угол называется **развернутым**, если обе его стороны лежат на одной прямой. Можно сказать, что каждая сторона развернутого угла является продолжением другой стороны. На рисунке 14 изображен развернутый угол с вершиной C и сторонами p и q .

Любой угол разделяет плоскость на две части. Если угол неразвернутый, то одна из частей называется **внутренней**, а другая — **внешней областью** этого угла (рис. 15, а). На рисунке 15, б изображен неразвернутый угол. Точки A, B, C лежат внутри этого угла (т. е. во внутренней области угла), точки D и E — на сторонах угла, а точки P и Q — вне угла (т. е. во внешней области угла).

Если угол развернутый, то любую из двух частей, на которые он разделяет плоскость, можно считать внутренней областью угла.

Фигуру, состоящую из угла и его внутренней области, также называют углом.

Если луч исходит из вершины неразвернутого угла и проходит внутри угла, то он делит этот угол на два угла. На рисунке 16, а луч OC делит угол AOB на два угла: AOC и COB . Если угол AOB развернутый, то любой луч OC , не совпадающий с лучами OA и OB , делит этот угол на два угла: AOC и COB (рис. 16, б).

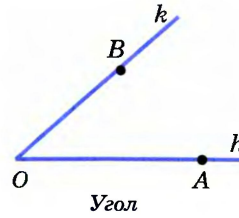


Рис. 13

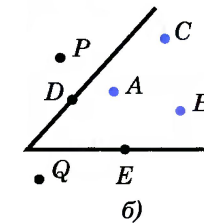


Развернутый угол

Рис. 14

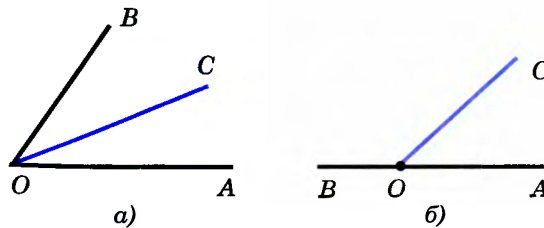


а)



б)

Рис. 15



Луч OC делит угол AOB на два угла: $\angle AOC$ и $\angle COB$

Рис. 16

Практические задания и вопросы

- 8 Проведите прямую, отметьте на ней точки A и B и на отрезке AB отметьте точку C . а) Среди лучей AB , BC , CA , AC и BA назовите совпадающие лучи; б) назовите луч, который является продолжением луча CA .
- 9 Начертите три неразвернутых угла и обозначьте их так: $\angle AOB$, $\angle hk$, $\angle M$.
- 10 Начертите два развернутых угла и обозначьте их буквами.
- 11 Начертите три луча h , k и l с общим началом. Назовите все углы, образованные данными лучами.
- 12 Начертите неразвернутый угол hk . Отметьте две точки внутри этого угла, две точки вне этого угла и две точки на сторонах угла.
- 13 Начертите неразвернутый угол. Отметьте точки A , B , M и N так, чтобы все точки отрезка AB лежали внутри угла, а все точки отрезка MN лежали вне угла.
- 14 Начертите неразвернутый угол AOB и проведите: а) луч OC , который делит угол AOB на два угла; б) луч OD , который не делит угол AOC на два угла.
- 15 Сколько неразвернутых углов образуется при пересечении двух прямых?
- 16 Какие из точек, изображенных на рисунке 17, лежат внутри угла hk , а какие — вне этого угла?
- 17 Какие из лучей, изображенных на рисунке 18, делят угол AOB на два угла?

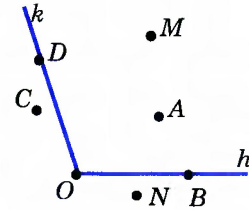


Рис. 17

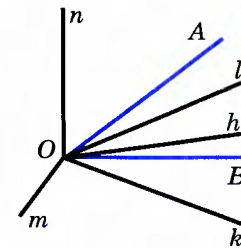


Рис. 18

3

Сравнение отрезков и углов

5 Равенство геометрических фигур

Среди окружающих нас предметов встречаются такие, которые имеют одинаковую форму и одинаковые размеры. Такими предметами являются, например, два оди-

наковых листа бумаги, две одинаковые книги, два одинаковых автомобиля. В геометрии две фигуры, имеющие одинаковую форму и одинаковые размеры, называют равными.

На рисунке 19 изображены фигуры Φ_1 и Φ_2 . Чтобы установить, равны они или нет, поступим так. Скопируем фигуру Φ_1 на кальку. Передвигая кальку и накладывая ее на фигуру Φ_2 той или другой стороной, попытаемся совместить копию фигуры Φ_1 с фигурой Φ_2 . Если они совместятся, то фигура Φ_1 равна фигуре Φ_2 .

Мы можем представить себе, что на фигуру Φ_2 накладывается не копия фигуры Φ_1 , равная этой фигуре, а сама фигура Φ_1 . Поэтому в дальнейшем будем говорить о наложении самой фигуры (а не копии) на другую фигуру. Итак, две геометрические фигуры называются **равными**, если их можно совместить наложением.

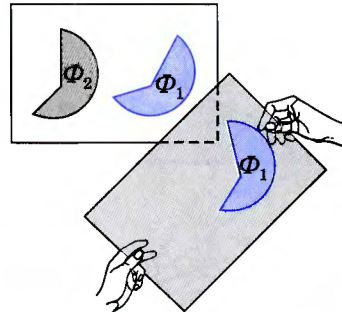


Рис. 19

6 Сравнение отрезков и углов

На рисунке 20, а изображены два отрезка. Чтобы установить, равны они или нет, наложим один отрезок на другой так, чтобы конец одного отрезка совместился с концом другого (рис. 20, б). Если при этом два других конца также совместятся, то отрезки полностью совместятся и, значит, они равны. Если же два других конца не совместятся, то меньшим считается тот отрезок, который составляет часть другого. На рисунке 20, в отрезок AC составляет часть отрезка AB , поэтому отрезок AC меньше отрезка AB (пишут так: $AC < AB$).

Точка отрезка, делящая его пополам, т. е. на два равных отрезка, называется **серединой отрезка**. На рисунке 21 точка C — середина отрезка AB .

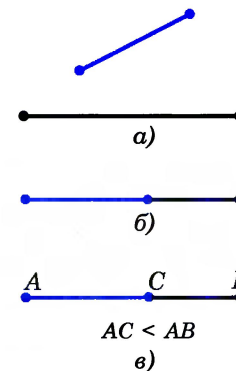


Рис. 20

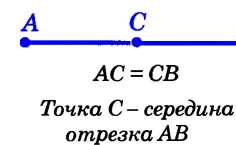


Рис. 21

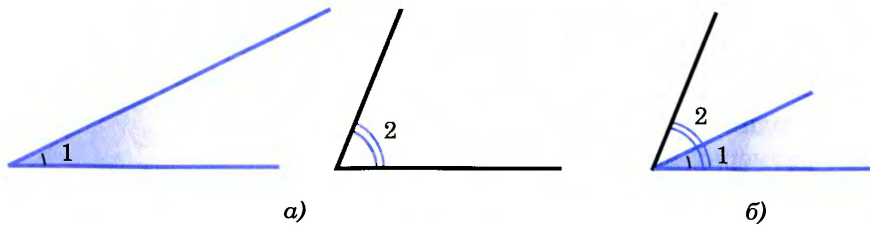


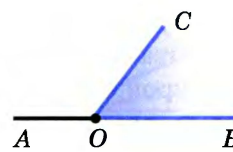
Рис. 22

На рисунке 22, а изображены неразвернутые углы 1 и 2. Чтобы установить, равны они или нет, наложим один угол на другой так, чтобы сторона одного угла совместились со стороной другого, а две другие оказались по одну сторону от совместившихся сторон (рис. 22, б).

Если две другие стороны также совместятся, то углы полностью совместятся и, значит, они равны. Если же эти стороны не совместятся, то меньшим считается тот угол, который составляет часть другого. На рисунке 22, б угол 1 составляет часть угла 2, поэтому $\angle 1 < \angle 2$.

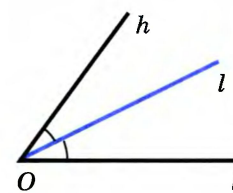
Неразвернутый угол составляет часть развернутого угла (рис. 23), поэтому развернутый угол больше неразвернутого угла. Любые два развернутых угла, очевидно, равны.

Луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла, называется **биссектрисой** угла. На рисунке 24 луч l — биссектриса угла hk .



Неразвернутый угол COB составляет часть развернутого угла AOB

Рис. 23



$\angle hl = \angle lk$
Луч l — биссектриса угла hk

Рис. 24

Вопросы и задачи

- 18 На луче с началом O отмечены точки A , B и C так, что точка B лежит между точками O и A , а точка A — между точками O и C . Сравните отрезки OB и OA , OC и OA , OB и OC .
- 19 Точка O является серединой отрезка AB . Можно ли совместить наложением отрезки: а) OA и OB ; б) OA и AB ?
- 20 На рисунке 25 отрезки AB , BC , CD и DE равны. Укажите: а) середины отрезков AC , AE и CE ; б) отрезок,

серединой которого является точка D ; в) отрезки, серединой которых является точка C .

- 21 Луч OC делит угол AOB на два угла. Сравните углы AOB и AOC .
- 22 Луч l — биссектриса угла hk . Можно ли наложением совместить углы: а) hl и lk ; б) hl и hk ?
- 23 На рисунке 26 углы, обозначенные цифрами, равны. Укажите: а) биссектрису каждого из углов AOC , BOF , AOE ; б) все углы, биссектрисой которых является луч OC .

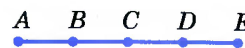


Рис. 25

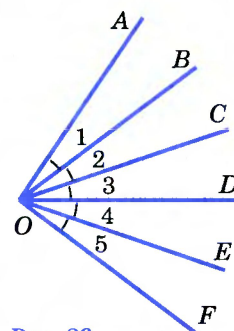


Рис. 26

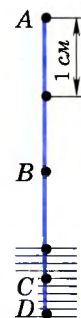
§ 4

Измерение отрезков

7 Длина отрезка

На практике часто приходится измерять отрезки, т. е. находить их длины. Измерение отрезков основано на сравнении их с некоторым отрезком, принятым за **единицу измерения** (его называют также **масштабным отрезком**). Если, например, за единицу измерения принят сантиметр, то для определения длины отрезка узнают, сколько раз в этом отрезке укладывается сантиметр. На рисунке 27 в отрезке AB сантиметр укладывается ровно два раза. Это означает, что длина отрезка AB равна 2 см. Обычно говорят кратко: «Отрезок AB равен 2 см» — и пишут: $AB = 2$ см.

Может оказаться так, что отрезок, принятый за единицу измерения, не укладывается целое число раз в измеряемом отрезке — получается остаток. Тогда единицу измерения делят на равные части, обычно на 10 равных частей, и определяют, сколько раз



$$AB = 2 \text{ см}, AC = 3,4 \text{ см}, AD \approx 3,8 \text{ см}$$

Рис. 27

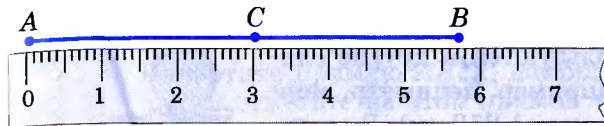
одна такая часть укладывается в остатке. Например, на рисунке 27 в отрезке AC сантиметр укладывается 3 раза, и в остатке ровно 4 раза укладывается одна десятая часть сантиметра (миллиметр), поэтому длина отрезка AC равна 3,4 см.

Возможно, однако, что и взятая часть единицы измерения (в данном случае миллиметр) не укладывается в остатке целое число раз, и получается новый остаток. Так будет, например, с отрезком AD на рисунке 27, в котором сантиметр укладывается три раза с остатком, а в остатке миллиметр укладывается восемь раз вновь с остатком. В таком случае говорят, что длина отрезка AD приближенно равна 3,8 см.

Для более точного измерения этого отрезка указанную часть единицы измерения (миллиметр) можно разделить на 10 равных частей и продолжить процесс измерения. Мысленно этот процесс можно продолжать и дальше, измеряя длину отрезка со все большей точностью. На практике, однако, пользуются приближенными значениями длин отрезков.

За единицу измерения можно принимать не только сантиметр, но и любой другой отрезок. **Выбрав единицу измерения, можно измерить любой отрезок, т. е. выразить его длину некоторым положительным числом.** Это число показывает, сколько раз единица измерения и ее части укладываются в измеряемом отрезке.

Если два отрезка равны, то единица измерения и ее части укладываются в этих отрезках одинаковое число раз, т. е. **равные отрезки имеют равные длины.** Если же один отрезок меньше другого, то единица измерения (или ее часть) укладывается в этом отрезке меньшее число раз, чем в другом, т. е. **меньший отрезок имеет меньшую длину.**



$$AC + CB = AB$$

На рисунке 28 изображен отрезок AB . Точка C делит его на два отрезка: AC и CB . Мы видим, что $AC = 3$ см, $CB = 2,7$ см, $AB = 5,7$ см. Таким образом, $AC + CB = AB$. Ясно, что и во всех других случаях, когда точка делит отрезок на два отрезка, длина всего отрезка равна сумме длин этих двух отрезков.

Рис. 28

Если длина отрезка CD в k раз больше длины отрезка AB , то пишут $CD = kAB$.

Длина отрезка называется также расстоянием между концами этого отрезка.

8 Единицы измерения. Измерительные инструменты

Для измерения отрезков и нахождения расстояний на практике используют различные единицы измерения. Стандартной международной единицей измерения отрезков выбран метр — отрезок, приблизительно равный $\frac{1}{40\,000\,000}$ части земного меридиана. Эталон метра в виде специального металлического бруска хранится в Международном бюро мер и весов во Франции. Копии эталона хранятся в других странах, в том числе и в России. Один метр содержит сто сантиметров. В одном сантиметре десять миллиметров.

При измерении небольших расстояний, например расстояния между точками, изображенными на листе бумаги, за единицу измерения принимают сантиметр или миллиметр. Расстояние между отдельными предметами в комнате измеряют в метрах,

расстояние между населенными пунктами — в километрах. Используются и другие единицы измерения, например, дециметр, морская миля (1 миля равна 1,852 км). В астрономии для измерения очень больших расстояний за единицу измерения принимают световой год, т. е. путь, который свет проходит в течение одного года.

Мы назвали единицы измерения расстояний, которые используются на практике в наше время. В старину в разных странах существовали свои единицы измерения. Так, на Руси использовались аршин (0,7112 м), сажень (2,1336 м) и др.

На практике для измерения расстояний пользуются различными инструментами. Например, в техническом черчении употребляется масштабная миллиметровая линейка. Для измерения диаметра трубки используют штангенциркуль (рис. 29). С его помощью можно измерять расстояния с точностью до 0,1 мм. Для измерения расстояний на местности пользуются рулеткой, которая представляет собой ленту с нанесенными на ней делениями (рис. 30).

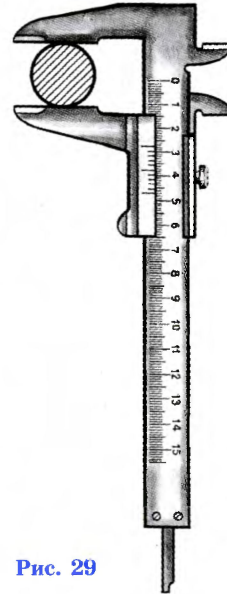


Рис. 29

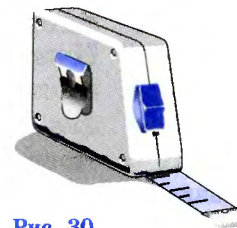


Рис. 30

Практические задания

- 24 Измерьте ширину и длину учебника геометрии и выразите их в сантиметрах и в миллиметрах.
- 25 Измерив толщину учебника геометрии без обложки, найдите толщину одного листа.
- 26 Найдите длины всех отрезков, изображенных на рисунке 31, если за единицу измерения принят отрезок: а) KL ; б) AB .
- 27 Начертите отрезок AB и луч h . Пользуясь масштабной линейкой, отложите на луче h от его начала отрезки, длины которых равны $2AB$, $\frac{1}{2}AB$ и $\frac{1}{4}AB$.
- 28 Начертите прямую и отметьте на ней точки A и B . С помощью масштабной линейки отметьте точки

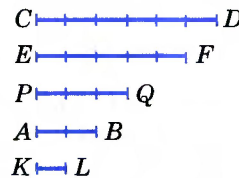


Рис. 31

- C и D так, чтобы точка B была серединой отрезка AC , а точка D — серединой отрезка BC .
- 29 Начертите прямую AB . С помощью масштабной линейки отметьте на этой прямой точку C , такую, что $AC = 2$ см. Сколько таких точек можно отметить на прямой AB ?

Вопросы и задачи

- 30 Точка B делит отрезок AC на два отрезка. Найдите длину отрезка AC , если $AB = 7,8$ см, $BC = 25$ мм.
- 31 Точка B делит отрезок AC на два отрезка. Найдите длину отрезка BC , если: а) $AB = 3,7$ см, $AC = 7,2$ см; б) $AB = 4$ мм, $AC = 4$ см.
- 32 Точки A , B и C лежат на одной прямой. Известно, что $AB = 12$ см, $BC = 13,5$ см. Какой может быть длина отрезка AC ?
- 33 Точки B , D и M лежат на одной прямой. Известно, что $BD = 7$ см, $MD = 16$ см. Каким может быть расстояние BM ?
- 34 Точка C — середина отрезка AB , равного 64 см. На луче CA отмечена точка D так, что $CD = 15$ см. Найдите длины отрезков BD и DA .
- 35 Расстояние между Москвой и С.-Петербургом равно 650 км. Город Тверь находится между Москвой и С.-Петербургом в 170 км от Москвы. Найдите расстояние между Тверью и С.-Петербургом, считая, что все три города расположены на одной прямой.
- 36 Лежат ли точки A , B и C на одной прямой, если $AC = 5$ см, $AB = 3$ см, $BC = 4$ см?

Решение

Если точки A , B и C лежат на одной прямой, то больший из отрезков AB , BC и AC равен сумме двух других. По условию больший из данных отрезков (отрезок AC) равен 5 см, а сумма двух других ($AB + BC$) равна 7 см. Поэтому точки A , B и C не лежат на одной прямой.

- 37 Точка C — середина отрезка AB , точка O — середина отрезка AC . а) Найдите AC , CB , AO и OB , если $AB = 2$ см; б) найдите AB , AC , AO и OB , если $CB = 3,2$ м.
- 38 На прямой отмечены точки O , A и B так, что $OA = 12$ см, $OB = 9$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков OA и OB , если точка O : а) лежит на отрезке AB ; б) не лежит на отрезке AB .
- 39 Отрезок, длина которого равна a , разделен произвольной точкой на два отрезка. Найдите расстояние между серединами этих отрезков.
- 40 Отрезок, равный 28 см, разделен на три неравных отрезка. Расстояние между серединами крайних отрезков 16 см. Найдите длину среднего отрезка.

§ 5

Измерение углов

9 Градусная мера угла

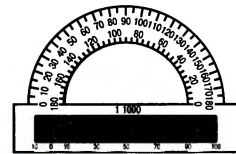
Измерение углов аналогично измерению отрезков — оно основано на сравнении их с углом, принятым за единицу измерения. Обычно за единицу измерения углов принимают **градус** — угол, равный $\frac{1}{180}$ части развернутого угла. Эта единица измерения углов была введена много веков назад, еще до нашей эры.

Положительное число, которое показывает, сколько раз градус и его части укладываются в данном угле, называется **градусной мерой угла**. Для измерения углов используется транспортир (рис. 32).

На рисунке 33, а изображен угол AOB , градусная мера которого равна 150° . Обычно говорят кратко: «Угол AOB равен 150° » — и пишут: $\angle AOB = 150^\circ$. На рисунке 33, б угол hk равен 40° ($\angle hk = 40^\circ$). Определенные части градуса носят специальные названия: $\frac{1}{60}$ часть градуса называется **минутой**, $\frac{1}{60}$ часть минуты называется **секундой**. Минуты обозначают знаком «'», а секунды — знаком «''». Например, угол в 60 градусов, 32 минуты и 17 секунд обозначается так: $60^\circ 32' 17''$.

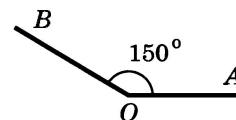
Если два угла равны, то градус и его части укладываются в этих углах одинаковое число раз, т. е. **равные углы имеют равные градусные меры**.

Если же один угол меньше другого, то в нем градус (или его часть) укладывается меньшее число раз, чем в другом угле, т. е. **меньший угол имеет меньшую градусную меру**.

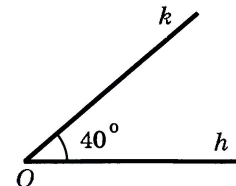


Транспортир

Рис. 32



а)



б)

Рис. 33

Так как градус составляет $\frac{1}{180}$ часть развернутого угла, то он укладывается в развернутом угле ровно 180 раз, т. е. **развернутый угол равен 180°** .

Неразвернутый угол меньше развернутого угла, поэтому **неразвернутый угол меньше 180°** .

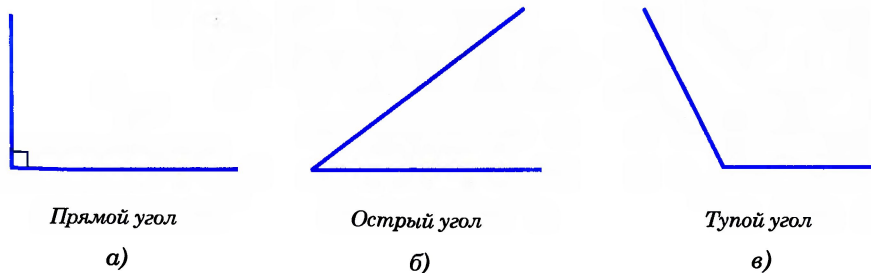
На рисунке 34 изображены лучи с началом в точке O . Луч OC делит угол AOB на два угла: AOC и COB . Мы видим, что $\angle AOC = 40^\circ$, $\angle COB = 120^\circ$, $\angle AOB = 160^\circ$. Таким образом,

$$\angle AOC + \angle COB = \angle AOB.$$

Ясно, что и во всех других случаях, когда луч делит угол на два угла, градусная мера всего угла равна сумме градусных мер этих углов.

Угол называется **прямым**, если он равен 90° (рис. 35, а), **острым**, если он меньше 90° , т. е. меньше прямого угла (рис. 35, б), **тупым**, если он больше 90° , но меньше 180° , т. е. больше прямого, но меньше развернутого угла (рис. 35, в).

Прямые углы мы видим в окружающей нас обстановке: прямой угол образуют линии пересечения стен и потолка в комнате, два края стола прямоугольной формы и т. д.



Прямой угол

а)

Острый угол

б)

Тупой угол

в)

Рис. 35

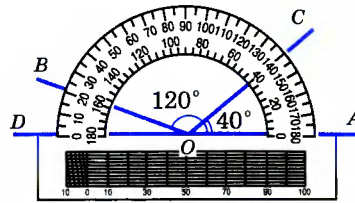


Рис. 34

10 Измерение углов на местности

Измерение углов на местности проводится с помощью специальных приборов. Простейшим из них является астролябия (рис. 36). Она состоит из двух частей: диска, разделенного на градусы, и вращающейся вокруг центра диска линейки (алидады). На концах алидады находятся два узких окошечка, которые используются для установки ее в определенном направлении.

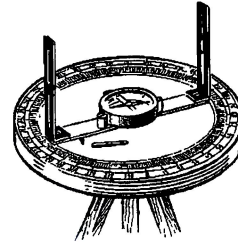


Рис. 36

Для того чтобы измерить угол AOB на местности, треножник с астролябией ставят так, чтобы отвес, подвешенный к центру диска, находился точно над точкой O . Затем устанавливают алидаду вдоль одной из сторон OA или OB , и отмечают деление, против которого находится указатель алидады. Далее поворачивают алидаду, направляя ее вдоль другой стороны измеряемого угла, и отмечают деление, против которого окажется указатель алидады. Разность отсчета и дает градусную меру угла AOB .

Измерения углов проводятся в различных исследованиях, например в астрономии при определении положения небесных тел. Очень важно с достаточной точностью измерять углы при определении положения искусственных спутников на орбитах. Для этой цели конструируют специальные приборы. Данные, полученные с помощью этих приборов, обрабатываются на электронно-вычислительных машинах (компьютерах).

Практические задания

- 41 Начертите три неразвернутых угла и один развернутый угол и обозначьте их так: $\angle AOB$, $\angle CDE$, $\angle hk$ и $\angle MNP$. С помощью транспортира измерьте углы и запишите результаты измерений.

- 42 Начертите луч OA и с помощью транспортира отложите от луча OA углы AOB , AOC и AOD так, чтобы $\angle AOB = 23^\circ$, $\angle AOC = 67^\circ$, $\angle AOD = 138^\circ$.
- 43 Начертите угол, равный 70° , и с помощью транспортира проведите его биссектрису.
- 44 Начертите угол AOB и с помощью транспортира проведите луч OC так, чтобы луч OA являлся биссектрисой угла BOC . Всегда ли это выполнимо?

Вопросы и задачи

- 45 Градусные меры двух углов равны. Равны ли сами углы?
- 46 На рисунке 37 изображены лучи с общим началом O . а) Найдите градусные меры углов AOX , BOX , AOB , COB , DOX ; б) назовите углы, равные 20° ; в) назовите равные углы; г) назовите все углы со стороной OA и найдите их градусные меры.
- 47 Луч OE делит угол AOB на два угла. Найдите $\angle AOB$, если: а) $\angle AOE = 44^\circ$, $\angle EOB = 77^\circ$; б) $\angle AOE = 12^\circ 37'$, $\angle EOB = 108^\circ 25'$.
- 48 Луч OC делит угол AOB на два угла. Найдите угол COB , если $\angle AOB = 78^\circ$, а угол AOC на 18° меньше угла BOC .
- 49 Луч OC делит угол AOB на два угла. Найдите угол AOC , если $\angle AOB = 155^\circ$, а угол AOC на 15° больше угла COB .
- 50 Угол AOB является частью угла AOC . Известно, что $\angle AOC = 108^\circ$, $\angle AOB = 3\angle BOC$. Найдите угол AOB .
- 51 На рисунке 38 угол AOD — прямой, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$. Найдите угол, образованный биссектрисами углов AOB и COD .
- 52 На рисунке 39 луч OV является биссектрисой угла ZOY , а луч OU — биссектрисой угла XOY . Найдите угол XOZ , если $\angle UOV = 80^\circ$.
- 53 Луч l является биссектрисой неразвернутого угла hk . Может ли угол hl быть прямым или тупым?

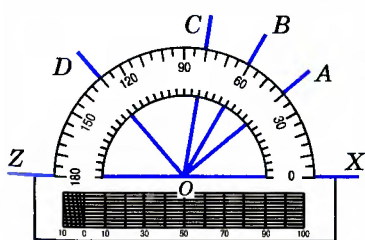


Рис. 37

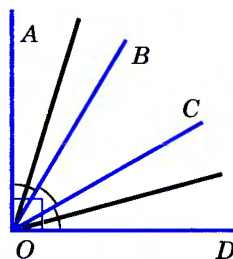


Рис. 38

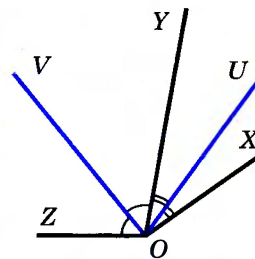


Рис. 39

§ 6

Перпендикулярные прямые

11 Смежные и вертикальные углы

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются **смежными**.

На рисунке 40 углы AOB и BOC смежные. Так как лучи OA и OC образуют развернутый угол, то

$$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC = 180^\circ.$$

Таким образом, сумма смежных углов равна 180° .

Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого.

На рисунке 41 углы 1 и 3, а также углы 2 и 4 — вертикальные.

Угол 2 является смежным как с углом 1, так и с углом 3. По свойству смежных углов $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ и $\angle 3 + \angle 2 = 180^\circ$. Отсюда получаем: $\angle 1 = 180^\circ - \angle 2$, $\angle 3 = 180^\circ - \angle 2$. Таким образом, градусные меры углов 1 и 3 равны. Отсюда следует, что и сами углы равны. Итак, **вертикальные углы равны**.

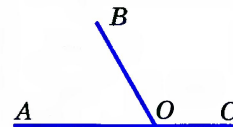


Рис. 40

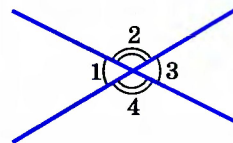


Рис. 41

12 Перпендикулярные прямые

Рассмотрим две пересекающиеся прямые (рис. 42). Они образуют четыре неразвернутых угла. Если один из них прямой (угол 1 на рис. 42), то остальные углы также прямые (объясните почему).

Две пересекающиеся прямые называются **перпендикулярными** (или взаимно перпендикулярными), если они образуют четыре прямых угла.

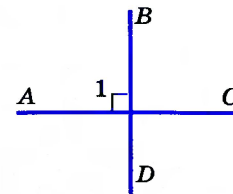


Рис. 42

Перпендикулярность прямых AC и BD обозначается так: $AC \perp BD$ (читается: «Прямая AC перпендикулярна к прямой BD »).

Отметим, что две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются (рис. 43, а).

В самом деле, рассмотрим прямые AA_1 и BB_1 , перпендикулярные к прямой PQ (рис. 43, б). Мысленно перегнем рисунок по прямой PQ так, чтобы верхняя часть рисунка наложилась на нижнюю. Так как прямые углы 1 и 2 равны, то луч PA наложится на луч PA_1 . Аналогично, луч QB наложится на луч QB_1 . Поэтому, если предположить, что прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M , то эта точка наложится на некоторую точку M_1 , также лежащую на этих прямых (рис. 43, в), и мы получим, что через точки M и M_1 проходят две прямые: AA_1 и BB_1 . Но это невозможно. Следовательно, наше предположение неверно и, значит, прямые AA_1 и BB_1 не пересекаются.

Для проведения перпендикулярных прямых используют чертежный угольник и линейку (рис. 44).

13 Построение прямых углов на местности

Для построения прямых углов на местности применяют специальные приборы, простейшим из которых является экер. Экер представляет собой два бруска, расположенных под прямым углом и укрепленных на треножнике (рис. 45). На концах брусков вбиты гвозди так, что прямые, проходящие через них, взаимно перпендикулярны. Чтобы построить на местности прямой угол с заданной стороной OA , устанавливают треножник с экером так, чтобы от-

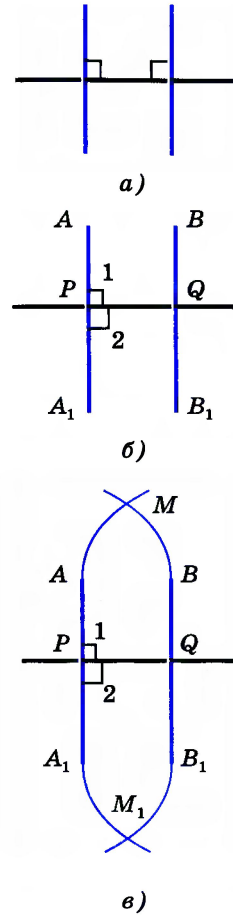


Рис. 43

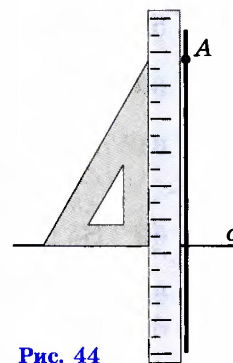


Рис. 44

вес находился точно над точкой O , а направление одного бруска совпало с направлением луча OA . Совмещение этих направлений можно осуществить с помощью вехи, поставленной на луче. Затем провешивают прямую линию по направлению другого бруска (прямая OB на рисунке 45). Получается прямой угол AOB .

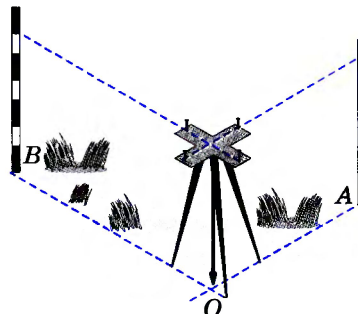


Рис. 45

В геодезии для построения прямых углов используют более совершенные приборы, например **теодолит**.

Практические задания

- 54 Начертите острый угол AOB и на продолжении луча OB отметьте точку D . Сравните углы AOB и AOD .
- 55 Начертите три угла: острый, прямой и тупой. Для каждого из них начертите смежный угол.
- 56 Начертите неразвернутый угол hk . Постройте угол h_1k_1 так, чтобы углы hk и h_1k_1 были вертикальными.
- 57 Начертите неразвернутый угол MON и отметьте точку P внутри угла и точку Q — вне его. С помощью чертежного угольника и линейки через точки P и Q проведите прямые, перпендикулярные к прямым OM и ON .

Вопросы и задачи

- 58 Найдите угол, смежный с углом ABC , если: а) $\angle ABC = 111^\circ$; б) $\angle ABC = 90^\circ$; в) $\angle ABC = 15^\circ$.
- 59 Один из смежных углов прямой. Каким (острым, прямым, тупым) является другой угол?
- 60 Верно ли утверждение: если смежные углы равны, то они прямые?
- 61 Найдите смежные углы hk и kl , если: а) $\angle hk$ меньше $\angle kl$ на 40° ; б) $\angle hk$ больше $\angle kl$ на 120° ; в) $\angle hk$ больше $\angle kl$ на $47^\circ 18'$; г) $\angle hk = 3\angle kl$; д) $\angle hk : \angle kl = 5 : 4$.
- 62 На рисунке 46 углы BOD и COD равны. Найдите угол AOD , если $\angle COB = 148^\circ$.
- 63 Даны два равных угла. Равны ли смежные с ними углы?
- 64 Найдите изображенные на рисунке 41 углы: а) 1, 3, 4, если $\angle 2 = 117^\circ$; б) 1, 2, 4, если $\angle 3 = 43^\circ 27'$.

- 65 Найдите неразвернутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если: а) сумма двух из них равна 114° ; б) сумма трех углов равна 220° .
- 66 На рисунке 41 найдите углы 1, 2, 3, 4, если: а) $\angle 2 + \angle 4 = 220^\circ$; б) $3(\angle 1 + \angle 3) = \angle 2 + \angle 4$; в) $\angle 2 - \angle 1 = 30^\circ$.
- 67 На рисунке 47 изображены три прямые, пересекающиеся в точке O . Найдите сумму углов: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.
- 68 На рисунке 48 $\angle AOB = 50^\circ$, $\angle FOE = 70^\circ$. Найдите углы AOC , BOD , COE и COD .
- 69 Прямая a пересекает стороны угла A в точках P и Q . Могут ли обе прямые AP и AQ быть перпендикулярными к прямой a ?
- 70 Через точку A , не лежащую на прямой a , проведены три прямые, пересекающие прямую a . Докажите, что по крайней мере две из них не перпендикулярны к прямой a .

Вопросы для повторения к главе I

- Сколько прямых можно провести через две точки?
- Сколько общих точек могут иметь две прямые?
- Объясните, что такое отрезок.
- Объясните, что такое луч. Как обозначаются лучи?
- Какая фигура называется углом? Объясните, что такое вершина и стороны угла.
- Какой угол называется развернутым?
- Какие фигуры называются равными?
- Объясните, как сравнить два отрезка.
- Какая точка называется серединой отрезка?
- Объясните, как сравнить два угла.
- Какой луч называется биссектрисой угла?
- Точка C делит отрезок AB на два отрезка. Как найти длину отрезка AB , если известны длины отрезков AC и CB ?
- Какими инструментами пользуются для измерения расстояний?
- Что такое градусная мера угла?

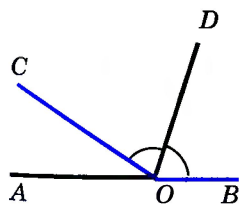


Рис. 46

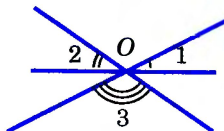


Рис. 47

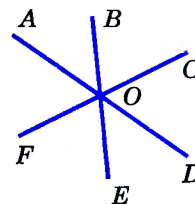


Рис. 48