ЖАҢЫ КИТЕП

С. К. Кыдыралиев, А. Б. Урдалетова, Г. М. Дайырбекова

МАТЕМАТИКА

Учебник для 6 класса
школ с русским языком обучения

*Допущено Министерством образования и науки
Кыргызской Республики*

Бишкек
2018

УДК 373.167.1
ББК 22.1 я721
К 97

Эксперт: *д. пед. н., профессор Е. Е. Син*
Консультанты: *Г. Н. Лебедева, О. Т. Садыкова*

Кыдыралиев С. К. и др.

К 97 Математика: Учебник для 6 кл. шк. с рус. яз. обучения / С. К. Кыдыралиев, А. Б. Урдалетова, Г. М. Дайырбекова – Б.: Аркус, 2018. – 280 с., илл.

ISBN 978-9967-31-853-3

Учебник соответствует принятому предметному стандарту и программе по математике для 6 класса школ с русским языком обучения. Ориентирован на развитие творческих способностей и мышления учащихся. Особенностью предлагаемого учебника является большое количество текстовых задач, примеров и упражнений на развитие логического мышления.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

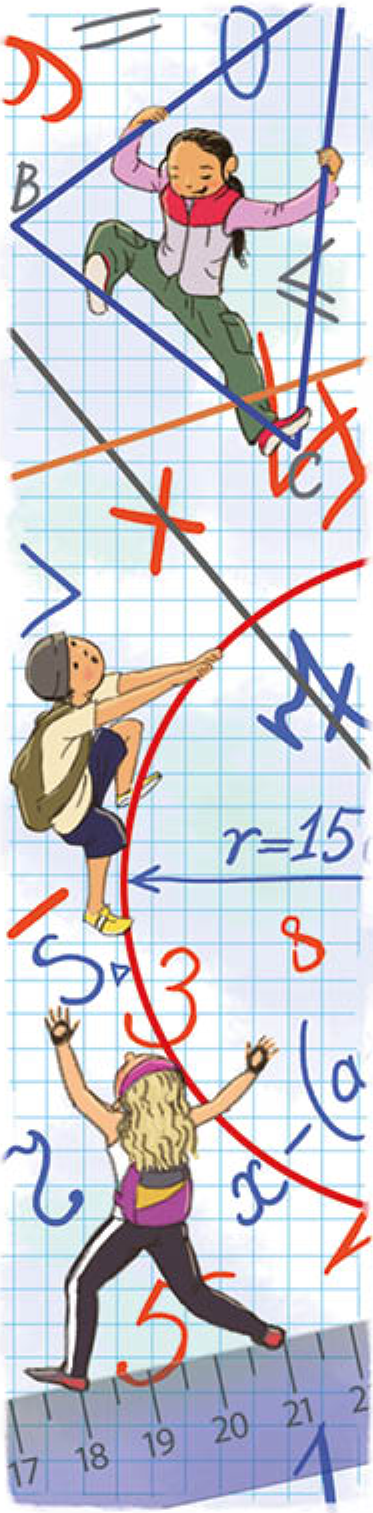
– Самостоятельная работа
– Исследовательская работа
– Итоги
– Домашнее задание

К 4306020500-18

УДК 373.167.1
ББК 22.1 я721

ISBN 978-9967-31-853-3

От авторов



Дорогие ребята!

Вы продолжаете изучать математику. Вам предстоит узнать много нового и интересного. Когда мы готовили для вас этот учебник, мы думали о том, как сделать его и полезным, и интересным, и постарались создать книгу, которой удобно пользоваться и во время занятий в классе, и при самостоятельном изучении предмета.

Чтобы научить вас использовать свои знания в жизни, основное внимание мы уделили текстовым задачам. Каждая новая ситуация описывается отдельным пунктом и, как правило, иллюстрируется задачей, которая приведена с подробным решением. Помните, что задача, с которой вы разобрались самостоятельно, запомнится лучше и принесёт максимальную пользу.

Сразу же за задачей следуют упражнения, которые решаются так же, как и задача. В конце каждого параграфа приведены итоговые задания. Они иллюстрируют материал всего параграфа.

Великий мыслитель Конфуций говорил: «Обучаться не задумываясь – зря тратить время». Надеемся, что эта книга поможет вам развить ваши способности к размышлению, анализу, синтезу, принятию правильных решений.

§ 1. Задачи на повторение

Начнём эту книгу с разминки после каникул – набора задач, которые вы можете решить немного поразмыслив. Если какие-то из этих задач не получились – не беда: отложите и попробуйте вернуться к ним позже.

I. На каждый вопрос в последующих задачах дайте один из ответов: ДА, НЕТ или НЕ ЗНАЮ.

1. В одном дюйме 2,54 *см*. Верно ли, что 100 *см*^{2} меньше, чем 16 квадратных дюймов?

2. Верны ли утверждения?

1) В одном дециметре 100 миллиметров.
2) Грамм в 10000 раз меньше центнера.
3) В половине суток 720 минут.

3. Вася и Аида занимаются арифметикой. Вася собирается сложить 1,236 и 5,414, а затем округлить сумму до десятых. Аида, в свою очередь, собирается сначала округлить числа до десятых, а затем сложить. Верно ли утверждение?

1) Сумма исходных чисел 6,64.
2) Вася и Аида получат одинаковый результат.

4. Айсулу за 3 порции мороженого по 15 сомов и литр кефира по 32 сома 50 тыйынов подала продавцу 100 сомов. Верны ли утверждения?

1) Стоимость покупки 77 сомов 50 тыйынов.
2) Она получит сдачу 23 сома 50 тыйынов.

5. Верны ли утверждения?

1) Любой прямоугольник можно разрезать на 6 одинаковых прямоугольных треугольников.
2) Наиболее возможная площадь прямоугольника с периметром 24 *см* равна 35 *см*^{2}.

6. Квадрат со стороной 1 *м* разрезали на квадратики со стороной 1 *дм*, которые склеили в ленту. Верны ли утверждения?

1) Длина ленты 100 *дм*.
2) Площадь квадратика 10 *см*^{2}.

7. Верны ли утверждения?

1) У куба 6 граней.

2) У куба 6 вершин.

3) У куба 16 рёбер.

8. Скорость моторной лодки по течению реки 35 *км/час*, против течения реки – 25 *км/час*. Верны ли утверждения?

1) Скорость течения реки 10 *км/час*.

2) Собственная скорость моторной лодки 30 *км/час*.

9. В магазине имеется 3 вида тетрадей и 4 вида обложек. Верны ли утверждения?

1) Количество видов тетрадей составляет 75% от видов обложек.

2) Набор «тетрадь + обложка» можно выбрать 7 способами.

10. В корзине лежат яблоки, груши и персики, всего 33 фрукта. Груш в 2 раза меньше, чем персиков, а яблок на 3 меньше, чем груш и персиков вместе. Верны ли утверждения?

1) В корзине 6 груш.

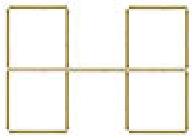
2) Яблок в корзине в два с половиной раза больше, чем персиков.

11. Автотурист отправился в путешествие на четырёхколёсном автомобиле с одним запасным колесом. По дороге он менял колёса с таким расчётом, чтобы каждое колесо проехало одно и то же расстояние. Верны ли утверждения?

1) Если автомобиль проехал 8000 *км*, то каждое колесо проехало 6000 *км*.

2) Если каждое из колёс проехало 8000 *км*, то автомобиль проехал 10 000 *км*.

12. Пятнадцать палочек одинаковой длины сложены, как показано на рисунке.



Можно ли переложить две палочки так, чтобы получилось пять равных квадратов?

II. В каждом последующем задании из предложенных ответов выберите правильный.

13. В каком из следующих выражений при замене цифры 7 на любую другую цифру результат не изменится?

1) $7 + 7 \cdot 7 - 7$; 3) $(7 + 7) : 7 - 7$; 5) $7 + 7 + 7 - 7$.
2) $7 - (7 : 7 - 7)$; 4) $7 + (7 : 7 - 7)$;

14. Часы лежат на столе циферблатом вверх. Минутная стрелка сейчас указывает на юго-запад. Через сколько минут она будет указывать на юго-восток?

1) 30; 2) 45; 3) 15; 4) 20; 5) 10.

15. Сумма цифр восьмизначного числа равна 7. Чему равно произведение цифр этого числа?

1) 0; 2) 4; 3) 7; 4) 8; 5) Невозможно определить.

16. В семье пятеро мужчин: Иван Сидорович, Сидор Иванович, Сидор Петрович, Пётр Сидорович и Пётр Петрович. Один из них сейчас смотрит в окно, его отец спит, брат читает книгу, а сыновья ушли гулять. Как зовут того, кто смотрит в окно?

1) Иван Сидорович; 3) Сидор Петрович; 5) Пётр Петрович.
2) Сидор Иванович; 4) Пётр Сидорович;

17. Старинная задача. Родник в 24 минуты даёт бочку воды. Сколько бочек воды даёт родник в сутки?

1) 40; 2) 28; 3) 72; 4) 60; 5) 50.

18. Значки на рисунке обозначают числа. Одинаковыми значками обозначены одинаковые числа. Какое число обозначает сердечко?

▲ + ◊ = 5; ▲ – ◊ = 5; ◊ + ▼ = 7; ▲ + ▼ = ♥.

1) 8; 2) 21; 3) 12; 4) 5; 5) 6.

19. Сколько весит кирпич, если он весит столько же, сколько весят треть кирпича вместе с гирей весом 2 килограмма?

1) 5; 2) 4; 3) 3; 4) 4,5; 5) 6.

20. Дату 1 марта можно записать тремя последовательными нечётными числами, расположенными по возрастанию: 01.03.05. Сколько всего дат с таким свойством (включая названную) будет в нынешнем веке?

1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 14; 5) 16.

21. Федя выбрал два трёхзначных числа, у которых совпадают суммы цифр. От большего числа он отнял меньшее. Какую самую большую разность он может получить?

1) 899; 2) 810; 3) 801; 4) 792; 5) 783.

22. На столе лежит много карточек, на каждой из них написано одно из чисел: 4, 21 или 35. Какое самое маленькое количество карточек нужно взять, чтобы сумма всех чисел на них была равна 640?

1) 18; 2) 644; 3) 23; 4) 24; 5) 36.

23. Гепард пробегает 250 *м* за 15 сек.

С какой скоростью он бежит?

1) 80 *км/час*; 3) 60 *км/час*; 5) 56 *км/час*.
2) 75 *км/час*; 4) 45 *км/час*;

24. Если к сумме двух чисел прибавить их разность, то получится:

1) половина их суммы;
2) одно из этих двух чисел;
3) их удвоенная разность;
4) половина одного из этих чисел;
5) одно из этих чисел, умноженное на 2.

25. Дастан хотел умножить некоторое число на 201, но забыл про 0 и, умножив на 21, получил 693. А какой результат он должен был получить?

1) 6963; 2) 2903; 3) 1296; 4) 8823; 5) 6633.

26. Все числа, сумма цифр которых делится на 6, выписывают в порядке возрастания. Чему равна самая маленькая разность между соседними числами в этом ряду?

1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5; 5) 6.

27. Число *a* в два раза больше, чем число *b*. На сколько процентов число *b* меньше, чем *a*?

1) 100; 2) 200; 3) 40; 4) 50; 5) 60.

28. Все четырёхзначные числа, которые можно получить, переставляя цифры числа 2012, выписывают в порядке возрастания. Чему равна разность между ближайшими соседями числа 2012 в этом ряду?

1) 780; 2) 801; 3) 640; 4) 282; 5) 842.

29. В пяти играх футбольный клуб «Пруха» забил 3 мяча и пропустил 4 мяча в свои ворота. Три игры клуб выиграл, одну сыграл вничью и одну проиграл. Какой счёт был в матче, который «Пруха» проиграл?

1) 1 : 2; 2) 0 : 2; 3) 0 : 4; 4) 0 : 3; 5) 4 : 2.

30. Вдоль шоссе друг за другом расположены деревни *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* и *G*. В таблице указаны некоторые расстояния между этими деревнями. Например, расстояние от *B* до *E* равно 54 *км*. Чему равно расстояние от *A* до *G*?

A						
	B					
		C				
38			*D*			
	54		40	*E*		
94		68			*F*	
	96			34		*G*

1) 112; 2) 132; 3) 150; 4) 36; 5) 143.

§ 2. Числовая ось. Уравнения с модулем

В данном параграфе мы повторяем, систематизируем и развиваем понятия, введённые ранее.

2.1. Числовая ось

Возьмём горизонтальную прямую линию и отметим на ней отрезок *OA*. Левый конец отрезка обозначим цифрой 0 и назовём началом координат, правый – цифрой 1. Запись *A*(1) следует читать: *точка A имеет координату 1. OA* – единичный отрезок.

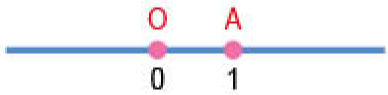


Рис. 1

В результате получили числовую ось. Каждой точке числовой оси сопоставляется число, и наоборот, каждому числу сопоставляется точка на числовой оси. Направление слева направо называется положительным.

Например, отложив вправо от точки 0 два отрезка *OA*, получим точку *B*, выражающую число 2; пять отрезков – точку *C*, выражающую число 5.

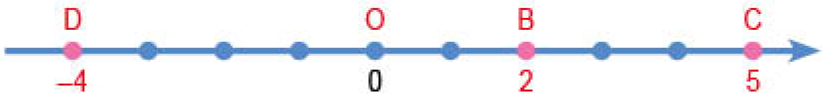


Рис. 2

Отрезки, отложенные влево от начала координат, выражают отрицательные числа. Так, отложив влево от точки 0 четыре отрезка *OA*, получим точку *D*, выражающую число −4. Числа 2, 5, −4 называются координатами точек *B*, *C*, *D*, соответственно. Этот факт записывают следующим образом: *B*(2), *C*(5), *D*(−4).

Запись *S*(2,5) означает, что точка *S* на числовой оси имеет координату 2,5; запись *T*(−7,1) – что точка *T* имеет координату −7,1.

Использование числовой оси проясняет многие математические вопросы. Так, совершенно простой становится задача сравнения чисел: чем правее находится число, тем оно больше. Пять с половиной больше трёх, две третьих больше нуля, один больше минус единицы, минус полтора больше минус четырёх и т. д.

31. Изобразите на числовой оси и сравните числа:

−3; 1; 2; −1; 5.

32. Изобразите на числовой оси и сравните числа:

4; 6; −2; −5; 0.

2.2. Модуль числа как расстояние

Точки, выражающие числа 4,77 и −4,77, находятся на одинаковом расстоянии от начала координат. Для того чтобы подчеркнуть этот факт, математики говорят, что числа 4,77 и −4,77 имеют одинаковое **абсолютное значение** (**модуль**).

Значение модуля числа – расстояние от начала координат до точки, выражающей это число. Таким образом, абсолютное значение, или, другими словами, модуль, как числа 4,77, так и числа −4,77, равен 4,77. Символически это записывают так: $|4{,}77| = 4{,}77$; $|-4{,}77| = 4{,}77$.

Итак, можно дать следующее определение модуля числа.

Модулем числа a называется расстояние (в единичных отрезках) от начала координат до точки $A(a)$.

33. Изобразите на числовой оси и сравните по абсолютной величине числа:

3; −1; 2; 1; 5; −3.

34. Изобразите на числовой оси и сравните по абсолютной величине числа:

4; −7; −2; 2; −3.

2.3. Длина отрезка

Разность чисел 5 и 3 равна 2 – длине отрезка между точками, выражающими эти числа; разность чисел 5 и −3 равна $5 - (-3) = 8$ – и это тоже длина отрезка между соответствующими точками.

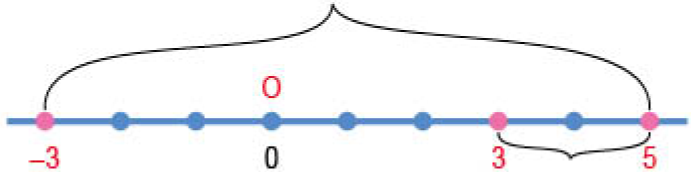


Рис. 3

Эти равенства являются частными случаями следующего явления: **длина отрезка** числовой оси равна разности координаты точки, являющейся правым концом отрезка, и координаты точки, являющейся левым концом отрезка.

Итак, если точка A имеет координату a, точка B – координату b, то длина отрезка AB равна $b - a$. Символически это записывается так: $|AB| = b - a = |a - b|$.

Длина отрезка AB не зависит от направления измерения: от A к B или от B к A. Поэтому справедливо равенство $|a - b| = |b - a|$.

35. Найдите длину отрезка, определяемого точками:

a) $A(7{,}3)$ и $N(2)$; c) $N(-2{,}9)$ и $I(-2)$; e) $U(7)$ и $N(-2{,}9)$.
b) $T(-2{,}2)$ и $O(0)$; d) $N(-2{,}9)$ и $A(7{,}3)$;

36. Найдите длину отрезка, определяемого точками:

a) $A(7{,}3)$ и $L(-3{,}3)$; c) $M(-4{,}9)$ и $B(-5{,}4)$;
b) $M(-4{,}9)$ и $A(7{,}3)$; d) $E(-0{,}23)$ и $T(-2{,}2)$.

2.4. Абсолютное значение числа (Модуль)

Каждому отрицательному числу можно сопоставить положительное, которое записывается теми же значками, только без знака минус: -1 и 1; $-1{,}5$ и $1{,}5$; $-120{,}97$ и $120{,}97$. Такое положительное число называется **модулем** или **абсолютным значением исходного числа**.

Модуль (абсолютное значение) положительного числа – это само число. Положительное и отрицательное число, имеющие одинаковый модуль, называются противоположными.

Модуль числа нуль равен нулю.

Модуль числа обозначается вертикальными палочками.

Например, модуль числа $-1{,}5$, записывается так: $|-1{,}5|$.

Тогда из сказанного следует:

$|-1{,}5| = 1{,}5$, $|1{,}5| = 15$, $|-7651{,}5| = 7651{,}5$, $|1005| = 1005$, $|0| = 0$.

37. Вычислите значение числового выражения.

a) $|2{,}1 - 18{,}5| =$ c) $|-1{,}15 - 7{,}4| =$ e) $|10{,}3 + 11 - 2{,}74| =$
b) $|50{,}1 - 87| =$ d) $|-13{,}5 + 74| =$ f) $|3{,}4 + 0{,}5 + 1{,}7(-4)| =$

38. Вычислите значение числового выражения.

a) $|-21 - 1{,}8| =$ c) $|11 \cdot 5 - 7{,}4| =$ e) $|0{,}3 + 1{,}1 - 7{,}4| =$
b) $|5 \cdot 1{,}1 - 27| =$ d) $|-1{,}3 \cdot 5 + 4{,}3| =$ f) $|3{,}4 \cdot 5 + 7(-4)| =$

2.5. «Отрицательное» расстояние

Задача

Айгерим едет со скоростью 56 *км/час*. Через 1,5 часа следом за ней со скоростью 88 *км/час* отправился Дамьен. На сколько километров больше проедет Айгерим, когда Дамьен находится в пути: a) 1 час; b) 2,2 часа; c) 4,25 часа?

Решение

За 1,5 часа Айгерим проедет $56 \cdot 1{,}5 = 84$ *км*. Поэтому, если обозначить через t время, которое находится в пути Дамьен, то за это время Дамьен проедет $88t$ километров, а Айгерим $84 + 56t$ *км*, а разница d между расстояниями, преодолёнными Айгерим и Дамьеном, $d = (84 + 56t) - 88t$.

Поэтому через 1 час после выезда Дамьена Айгерим проедет на
$d = (84 + 56 \cdot 1) - 88 \cdot 1 = 140 - 88 = 52$ *км* больше.

Через 2,2 часа Айгерим проедет на
$d = (84 + 56 \cdot 2{,}2) - 88 \cdot 2{,}2 = 207{,}2 - 193{,}6 = 13{,}6$ *км* больше.

Через 4,25 часа Айгерим проедет на
$d = (84 + 56 \cdot 4{,}25) - 88 \cdot 4{,}25 = 322 - 374 = -52$ *км* больше.

В последнем случае получился непонятный результат: -52 километра. Разве так бывает? Оказывается, бывает. Знак минус говорит нам, что имеет место обратное. Величина d в нашей задаче показывает, на сколько километров больше проехала Айгерим по сравнению с Дамьеном. Через час после выезда Дамьена Айгерим проехала на 52 *км* больше, через 2,2 часа – на 13,6 *км* больше. Через 4,25 часа после выезда Дамьен проедет больше, чем Айгерим – он к тому времени обгонит Айгерим. А так как величина d показывает, на сколько *км* Айгерим опережает Дамьена, то через 4,25 часа она станет отрицательной, так как в это время Дамьен уже опережает Айгерим.

39. Из первого крана со скоростью 25 *л* в минуту наполняют первый бассейн, из второго крана со скоростью 40 *л* в минуту наполняют второй бассейн. В начальный момент в первом бассейне имелось 300 литров воды, второй был сухим. На сколько литров будет больше воды в первом бассейне через: a) 5 *мин*; b) 8 *мин*; c) 21 *мин*; d) 32 *мин*?

40. На складе A 190 *кг* муки, на складе B имеется 450 *кг*. Каждый час количество муки на складе A увеличивается на 70 *кг* муки, на складе B – на 50 *кг*. На сколько *кг* муки будет больше на складе B через: a) 1,5 часа; b) 10 часов; c) 16 часов; d) 19 часов?

2.6. Денежный долг как отрицательная величина

Задача

Иван решил стать миллионером. После того как в течение 8 лет он получал ежегодную прибыль, равную 135 тысячам сомов, ему до желанной цели осталось 40 тысяч. Каким было финансовое положение Ивана в начальный момент времени?

Решение

В одном миллионе тысяча тысяч. Следовательно, через 8 лет у Ивана было $1000 - 40 = 960$ тысяч сомов, а заработал он за это время

$135 \cdot 8 = 1080$ тысяч. Таким образом, у Ивана в начальный момент времени было $960 - 1080 = -120$ тысяч.

Отрицательное число в данном случае говорит нам, что в начальный момент времени Иван был должен 120 тысяч сомов.

41. Андрей сделал покупки на сумму 235, 172 и 983 сома и расплатился по карточке. Сколько сомов он должен, если до совершения покупок на карточке было 1307 сомов?

42. Валентина сделала покупки на сумму 681, 672 и 387 сомов и расплатилась по карточке. Сколько сомов она должна, если до совершения покупок на карточке было 1493 сома?

2.7. Определение координат точек по заданному расстоянию

Задача

1. Найти координату точки на числовой оси, расстояние от которой до точки $M(4,2)$ равно 3,1.

2. Найти координату точки на числовой оси, расстояние от которой до точки $N(-2,3)$ равно 3,25.

Решение

1. Обозначив через x искомую координату, получим уравнение

$x - 4,2 = 3,1.$

Отсюда следует, что $x = 7,3$. Мы нашли координату точки, которая лежит правее точки M.

В то же время и слева от точки M на расстоянии 3,1 имеется точка. Её координату можно найти, решив уравнение $4,2 - x = 3,1$. Для этого перенесём 4,2 вправо: $-x = 3,1 - 4,2$, вычтем и, разделив на -1, получим $x = 1,1$.

Итак, мы получили, что задача имеет два решения: точки (1,1) и (7,3) находятся на расстоянии 3,1 от точки $M(4,2)$.

Воспользовавшись тем, что модуль означает расстояние, два рассмотренных уравнения можно объединить и записать в виде одного уравнения с помощью модуля: $|x - 4,2| = 3,1$.

2. Задание может быть записано в виде уравнения с модулем: $|x - (-2,3)| = 3,25$. Его первое решение является корнем уравнения $x - (-2,3) = 3,25$, а другое – корнем уравнения $(-2,3) - x = 3,25$.

Из $x - (-2,3) = 3,25$ следует, что $x + 2,3 = 3,25$, а отсюда $x = 0,95$.

Из $(-2,3) - x = 3,25$ следует, что $-x = 3,25 + 2,3$, а отсюда $x = -5,55$.

Уравнение с модулем $|x - a| = b$, где b – неотрицательное число, заключает в себе 2 уравнения: $x - a = b$ и $-(x - a) = b$.

43. Решите уравнения.

a) $|x - 5{,}12| = 2{,}01$ c) $|x + 2{,}37| = 2{,}21$
b) $|x - 3{,}21| = 12$ d) $|x + 2{,}7| = 1{,}114$

44. Решите уравнения.

a) $|x - 1{,}5| = 0{,}32$ c) $|x + 3{,}9| = 8$
b) $|x - 1{,}45| = 0{,}7$ d) $|x + 1{,}43| = 1{,}29$

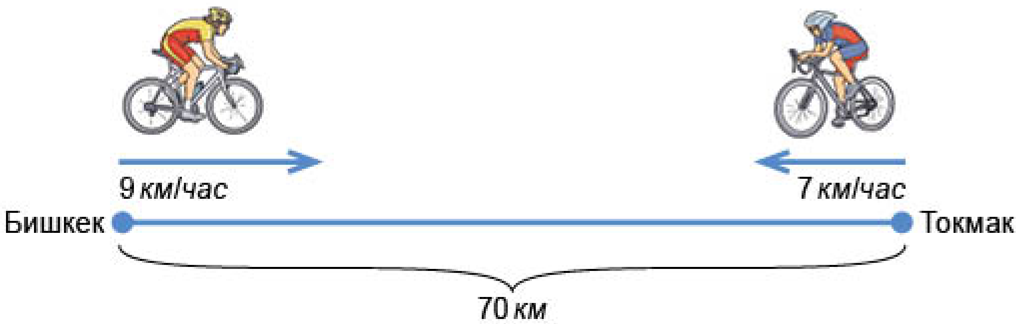
2.8. Расстояние до и после встречи

Задача

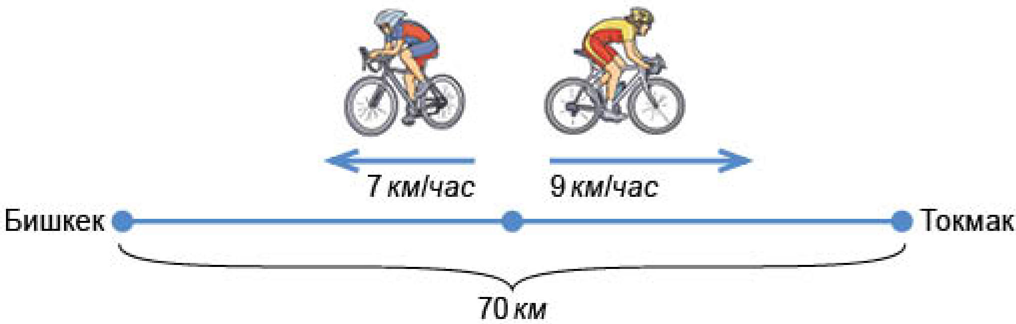
Два велосипедиста выехали навстречу друг другу: первый из Бишкека в Токмак со скоростью 9 *км/час*, второй – из Токмака в Бишкек со скоростью 7 *км/час*. Каким будет расстояние между ними через 3 часа? Через 5 часов 45 минут? Расстояние между Бишкеком и Токмаком составляет 70 км.

Решение

За время t они проедут $(9 + 7)t = 16t$ *км*. Соответственно, расстояние между ними будет $(70 - 16t)$ *км*. Через 3 часа расстояние между ними будет $70 - 16 \cdot 3 = 22$ *км*.



Через 5 часов 45 минут, или, другими словами, 5,75 часа, между ними будет $70 - 16 \cdot 5{,}75 = 70 - 92 = -22$ *км*.



Как нужно понимать величину −22 *км*?

Вычитая из 70 *км* расстояние, которое преодолели велосипедисты, мы находим расстояние до встречи. Поэтому знак минус означает, что встреча уже состоялась и они успели отъехать друг от друга на расстояние 22 *км*.

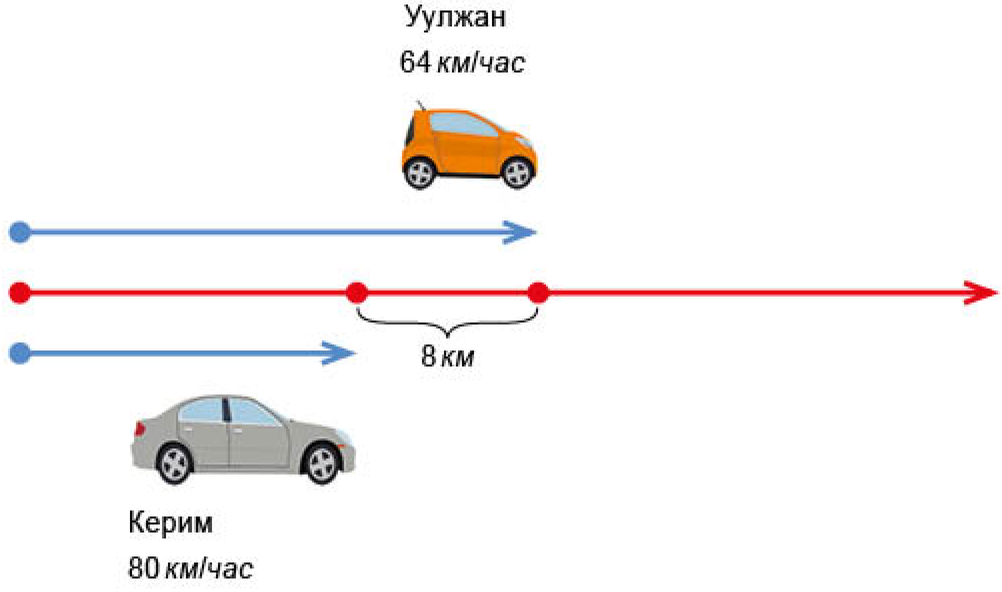
45. Самандар и Кумар выехали навстречу друг другу: Самандар – из Бишкека в Баткен со скоростью 69 *км/час*, Кумар – из Баткена в Бишкек со скоростью 77 *км/час*. Каким будет расстояние между ними через 5 часов? Через 8,5 часа? Расстояние между Бишкеком и Баткеном равно 908 *км*.

46. Два туриста вышли навстречу друг другу: первый – из Балыкчы в Кочкор со скоростью 4,5 *км/час*, второй – из Кочкора в Балыкчы со скоростью 4 *км/час*. Каким будет расстояние между ними через 4 часа? Через 8,2 часа? Расстояние между Балыкчы и Кочкором равно 54 *км*.

2.9. Определение времени по расстоянию

Задача

Уулжан выехала из дома со скоростью 64 *км/час*. Через 1,5 часа следом за ней со скоростью 80 *км/час* отправился Керим. Через сколько часов после выезда Керима расстояние между ними будет равно 8 *км*?



Решение

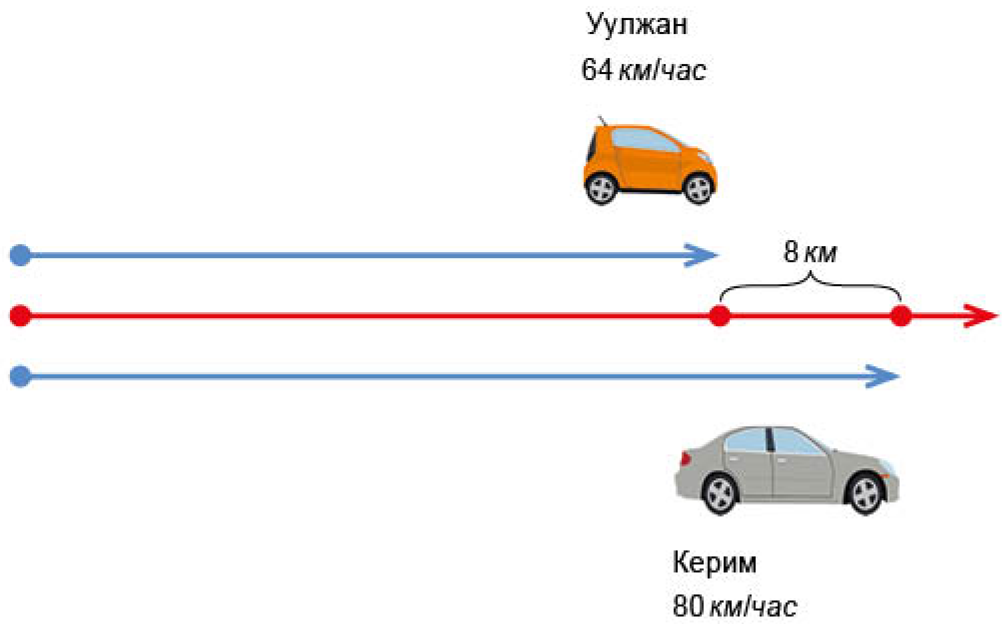
За 1,5 часа Уулжан проедет 64 · 1,5 = 96 *км*. Поэтому, если t – это время, которое находится в пути Керим, то расстояние, пройденное Керимом, будет равно $80t$, а расстояние, пройденное Уулжан, равно $96 + 64t$.

В результате, решив уравнение $(96 + 64t) - 80t = 8$, определим, через какое время Керим приблизится к Уулжан на расстояние 8 *км*:

$(96 + 64t) - 80t = 8$; $96 - 16t = 8$; $88 = 16t$; $t = 5,5$ часа.

Но это решение не является единственным. Так как Керим едет быстрее Уулжан, то через некоторое время он окажется впереди, и расстояние между ними достигнет 8 *км*.

То есть теперь уже $80t - (96 + 64t) = 8$.



Решив это уравнение:

$80t - (96 + 64t) = 8$; $16t - 96 = 8$; $16t = 104$; $t = 6,5$,

получим, что через 6,5 часа Керим будет впереди Уулжан на 8 *км*.

Воспользовавшись тем, что модуль означает расстояние, две рассмотренные ситуации можно объединить и записать в виде одного уравнения с помощью модуля: $|(96 + 64t) - 80t| = 8$.

47. Расстояние от деревни Простоквашино до города равно 54 *км*. Из города в Простоквашино со скоростью 35 *км/час* на поезде едет Шарик, а из Простоквашино в город со скоростью 25 *км/час* на велосипеде едет почтальон Печкин. Через сколько часов расстояние между ними будет равно 9 *км*?

48. Гульмира едет со скоростью 63 *км/час*. Через 120 *мин* следом за ней со скоростью 88 *км/час* выехал Усен. Через сколько часов расстояние между ними будет равно 21 *км*?

2.10. Уравнение с модулем

Уравнение с модулем $|f(x)| = b$, где b – неотрицательное число, заключает в себе два уравнения: $f(x) = b$ и $-f(x) = b$.

Здесь $f(x)$ – многочлен. Далее определение будет расширено.

Задача

Решите уравнение.

a) $|2x| = 25$; b) $|3x - 21| = 10{,}2$; c) $|5x + 27| - 3 = 211$; d) $|x + 2{,}7| + 13 = 11$.

Решение

a) Запись $|2x| = 25$ заключает в себе два уравнения: $2x = 25$ и $-2x = 25$. Корень 1-го из них: $x = 12{,}5$; 2-го: $x = -12{,}5$.

b) Имеют место два уравнения: $3x - 21 = 10{,}2$ и $-(3x - 21) = 10{,}2$.

Для того чтобы решить 1-ое из них, перенесём 21 вправо:

$3x = 10{,}2 + 21$, сложим: $3x = 31{,}2$ и, разделив полученное уравнение на 3, получим $x = 10{,}4$.

Для того чтобы решить 2-ое, раскроем скобки: $-3x + 21 = 10{,}2$, перенесём 21 вправо: $-3x = 10{,}2 - 21$, вычтем: $-3x = -10{,}8$ и, разделив на -3, получим $x = 3{,}6$.

c) Преобразуем уравнение так, чтобы слева от знака равенства остался модуль, а справа стояло число: $|5x + 27| = 211 + 3$. Отсюда получаем два уравнения: $5x + 27 = 214$ и $-(5x + 27) = 214$.

Решаем 1-ое: $5x = 214 - 27$, тогда $5x = 187$, и отсюда $x = 37{,}4$.

Решаем 2-ое: $-5x - 27 = 214$, поэтому $-5x = 214 + 27$, тогда $-5x = 241$, и поэтому $x = -48{,}2$.

d) После переноса числа 13 вправо уравнение $|x + 2{,}7| + 13 = 11$ преобразуется в уравнение $|x + 2{,}7| = -2$, которое не имеет решения, так как модуль – это расстояние, а расстояние не может быть отрицательным.

49. Решите уравнение.

a) $|4x| = 2{,}5$; b) $|6x - 1{,}2| = 16{,}5$; c) $|0{,}5x + 2| + 1 = 0{,}1$.

50. Решите уравнение.

a) $|7x| = 24{,}5$; b) $|5x + 2{,}1| = 0{,}2$; c) $|9x + 27| - 4 = 0{,}5$.

2.11. Углы, образованные пересечением прямых

Как это нам уже известно, между числами и точками на прямой можно установить взаимно однозначное соответствие. Далее, мы установим взаимно однозначное соответствие между точкой на плоскости и парой чисел. (Иногда говорят – упорядоченной парой чисел.) Для этого нам понадобятся две прямые. Сейчас обсудим некоторые общие понятия.

Нигде не пересекающиеся прямые называются **параллельными**. Отрезки, интервалы и им подобные, лежащие на параллельных прямых, называются параллельными.

Запись $AB \parallel CD$ читается следующим образом: прямая AB параллельна прямой CD. Стоит отметить, что прямые часто обозначаются маленькими буквами. Так, запись $m \parallel n$ означает: прямая m параллельна прямой n.

Или:

Две не пересекающиеся на плоскости прямые называются параллельными.

Отметим, что исследования, связанные с параллельными прямыми, имеют богатую историю. Они привели к делению геометрии на евклидову и неевклидову. Более подробно об этом вы можете узнать позже из специальных математических курсов. Следует заметить, что большой вклад в эти исследования внесли К. Ф. Гаусс, Г. Риман, Н. И. Лобачевский. Возможно, многие будут удивлены, но в ряду этих выдающихся учёных стоит имя Омара Хайама. Конечно, в первую очередь он известен как всемирно известный поэт. В то же время он вошёл в историю как выдающийся математик, астроном. Около 900 лет назад он создал календарь, который точнее, чем календарь, которым человечество пользуется в наши дни.

Наряду с параллельными прямыми, особое значение имеют перпендикулярные прямые.

Если пересечение двух прямых образует 4 одинаковых угла, то эти прямые называются **перпендикулярными**, а каждый из этих углов называется **прямым**. Так, запись $m \perp n$ означает: прямая m перпендикулярна прямой n.

Или:

Две прямые, образующие при пересечении прямые углы, называются перпендикулярными. Соответственно, отрезки (или лучи), лежащие на перпендикулярных прямых, называются перпендикулярными отрезками (или лучами).

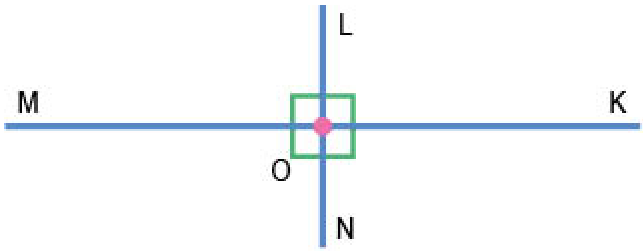


Рис. 4

Отметим следующие свойства параллельных и перпендикулярных прямых. Если две прямые на плоскости перпендикулярны третьей прямой, то эти первые две прямые параллельны между собой. Через всякую точку плоскости, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой.

В общем случае пересекающиеся прямые образуют смежные и вертикальные углы.

Два угла, у которых одна сторона общая, а вторые стороны образуют прямую, называются **смежными**.

Два смежных угла образуют так называемый **развёрнутый** угол, равный 180°.

Два угла, у которых общая вершина, а стороны взаимно дополняют друг друга до прямых, называются **вертикальными**.

Пусть точка *O* является точкой пересечения прямых *AB* и *CD*.

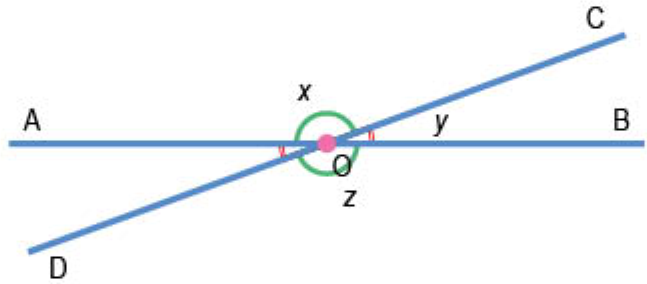


Рис. 5

Тогда углы *AOC* и *COB* являются смежными. Кроме них имеются ещё три пары смежных углов. (Перечислите их.) Понятно, что сумма смежных углов равна 180°.

В то же время в результате пересечения прямых *AB* и *CD* образуются две пары вертикальных углов. Это углы *AOC* и *BOD*, а также *COB* и *DOA*.

Докажем, что **вертикальные углы** *AOC* и *BOD* **равны друг другу**.

Пусть $\angle AOC = x$, $\angle COB = y$, $\angle BOD = z$. Так как углы *AOC* и *COB* смежные, $x + y = 180°$. Углы *COB* и *BOD* также смежные. Поэтому $y + z = 180°$.

Итак, имеют место уравнения: $x + y = 180°$ и $y + z = 180°$. Отсюда получаем, что $x = z$.

Мы доказали, что вертикальные углы *AOC* и *BOD* равны друг другу.

Для того чтобы убедиться в том, что вертикальные углы всегда равны друг другу, докажите, что вертикальные углы *COB* и *DOA* равны друг другу.

Задача

1) Точка *O* является точкой пересечения прямых *KL* и *MN*. Угол *KOM* равен 54°. Вычислите величины углов *MOL* и *LON*.

2) Сумма двух углов, полученных при пересечении двух прямых, равна 92°. Вычислите величины всех углов, полученных при пересечении двух прямых.

3) Точка *U* является точкой пересечения прямых *PQ*, *RS* и *TV*. Углы *PUR*, *RUT*, *TUQ* находятся в отношении 1 : 3 : 5. Вычислите величины углов *QUS*, *SUV* и *VUP*.

Решение

1) Углы *KOM* и *MOL* являются смежными.

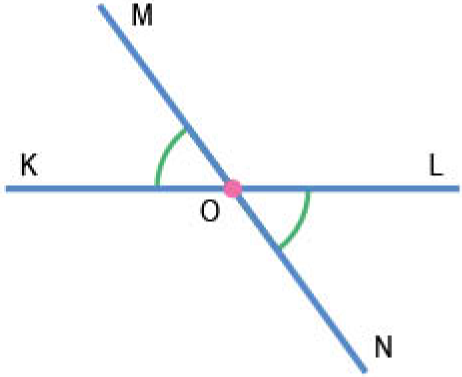


Рис. 6

Поэтому $\angle MOL$ равен: 180° − 54° = 126°. Угол *LON* равен 54°, потому что углы *KOM* и *LON* являются вертикальными.

2) Два угла, которые получаются при пересечении двух прямых, или смежные, или вертикальные (Рис. 6). Так как сумма смежных углов равна 180°, в данном случае речь идёт о вертикальных углах. Так как они равны друг другу, каждый из них равен 92 : 2 = 46°. Соответственно, каждый из двух оставшихся углов равен 180 − 46 = 134°.

3) Объединение углов *PUR*, *RUT*, *TUQ* образует развёрнутый угол, равный 180°.

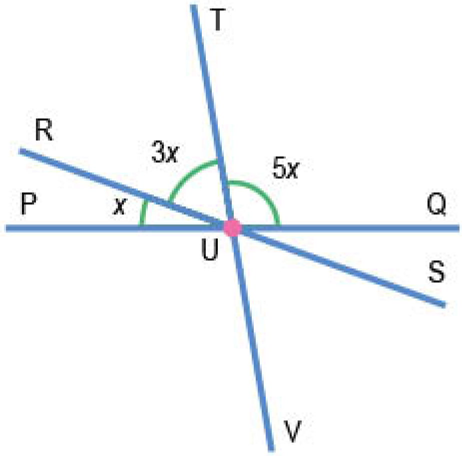


Рис. 7

Так как углы находятся в отношении 1 : 3 : 5, обозначив величину угла *PUR* через *x*, получим уравнение $x + 3x + 5x = 180°$. Тогда $\angle PUR = 180/9 = 20°$. Соответственно, $\angle RUT = 3 \cdot 20° = 60°$, $\angle TUQ = 5 \cdot 20° = 100°$. Фактически мы уже вычислили величины углов *QUS*, *SUV* и *VUP*, потому что они являются вертикальными к соответствующим углам *PUR*, *RUT*, *TUQ*.

Итак, $\angle QUS = 20°$, $\angle SUV = 60°$, $\angle VUP = 100°$.

51. Точка *O* является точкой пересечения прямых *AB* и *CD*. Угол *AOC* равен 127°. Вычислите величины углов *COB* и *BOD*.

52. Точка *U* является точкой пересечения прямых *KL* и *MN*. Углы *KUM* и *MUL* находятся в отношении 5 : 11. Вычислите величины углов *KUN* и *LUN*.

53. Сумма двух углов, полученных при пересечении двух прямых, равна 180°. Вычислите величины всех углов, полученных при пересечении двух прямых.

54. Точка *O* является точкой пересечения прямых *GH* и *IJ*. Угол *GOI* равен 77°. Вычислите величины углов *IOH* и *HOJ*.

55. Точка *J* является точкой пересечения прямых *EF*, *GH*. Углы *EJG*, *GJF* находятся в отношении 4 : 5. Вычислите величины углов *HJF* и *HJE*.

56. Сумма двух углов, полученных при пересечении двух прямых, равна 14°. Вычислите величины этих углов.

1. Температура воздуха с $a°$ понизилась на $d°$. Определите новую температуру, зная что:

a) $a = 31$; $d = 7$;
b) $a = -2$; $d = 6$;
c) $a = 11{,}2$; $d = 7$;
d) $a = 3$; $d = 5{,}4$;
e) $a = -4$; $d = 6$;
f) $a = 0{,}5$; $d = 7$;
g) $a = -2$; $d = 1{,}17$;
h) $a = -13$; $d = 7{,}5$;
i) $a = -14$; $d = -4{,}2$;
j) $a = -1{,}5$; $d = -1{,}6$.

2. Руслан, у которого было a сомов, истратил d сомов. Сколько сомов он теперь должен, если:

a) $a = 260$; $d = 770$;
b) $a = 81{,}2$; $d = 320$;
c) $a = 34$; $d = 720$;
d) $a = 53$; $d = 65{,}8$;
e) $a = 214$; $d = 632{,}5$;
f) $a = 95$; $d = 1732$;
g) $a = 452{,}5$; $d = 747$;
h) $a = 81{,}23$; $d = 1005$;
i) $a = 561{,}4$; $d = 1100{,}42$;
j) $a = 2315$; $d = 6714{,}51$?

3. Найдите длину отрезка, определяемого точками:

a) $L(1{,}7)$ и $E(-4{,}2)$;
b) $N(2{,}8)$ и $A(-0{,}6)$;
c) $B(-2{,}4)$ и $U(23)$;
d) $R(-12)$ и $O(0)$;
e) $V(-5{,}17)$ и $A(-0{,}6)$.

4. Вычислите разность между наименьшим трёхзначным натуральным числом и противоположным к нему числом.

5. Вычислите сумму всех целых чисел от -65 до 62.

6. Решите уравнения.

a) $|4x - 2| = 24{,}5$ b) $3 + |5x + 2{,}1| = 0{,}7$ c) $|3x + 2{,}7| - 4 = 0{,}2$

7. Расстояние от Оша до Джалал-Абада 100 *км*. Из Оша в Джалал-Абад со скоростью 17 *км/час* едет Ислам, а из Джалал-Абада в Ош со скоростью 23 *км/час* едет Таалай. Через сколько часов расстояние между ними будет равно 30 *км*?

8. Точка O является точкой пересечения прямых GH и IJ. Угол GOI равен $143°$. Вычислите величины углов IOH и HOJ.

9. Точка J является точкой пересечения прямых EF, GH. Углы EJG, GJF находятся в отношении $7 : 17$. Вычислите величины углов HJF и HJE.

10. Точка J является точкой пересечения прямых EF, GH, IN. Три угла, образованные при этом, находятся в отношении $3 : 4 : 5$. Вычислите величины этих углов.

11. Сумма двух углов, полученных при пересечении двух прямых, равна $344°$. Вычислите величины этих углов.

§ 3. Прямоугольная система координат на плоскости

3.1. Определение координат на плоскости

При обсуждении целых и дробных чисел в 5 классе было установлено, что использование соответствия между точками прямой и числами помогает прояснить многие математические проблемы. Это открытие внесло громадный вклад в развитие математики, позволив объединить алгебраические и геометрические методы решения задач.

В данном параграфе мы углубим этот подход и отождествим точку на плоскости с парой чисел.

> Прямая с выбранными на ней началом отсчёта (началом координат), единичным отрезком и направлением называется координатной прямой.

Поясним это более подробно.

Для того чтобы ввести прямоугольную систему координат на плоскости, возьмём числовую ось – ось *OX*, и через точку *O* – начало координат – проведём перпендикулярную прямую линию *OY*. На *OY*, выше точки *O*, возьмём точку *J* и объявим, что длина отрезка *OJ* равна единице. Тем самым мы ввели масштаб и отождествили точку *J* с числом 1. В итоге каждой точке на прямой *OY*, так же, как и каждой точке на оси *OX*, соответствует некоторое число, и наоборот.

Как следствие, имеем две числовые оси: первая – горизонтальная, вторая – вертикальная. Они позволяют отождествить каждую точку плоскости с упорядоченной парой чисел – координатами точки. Для этого возьмём точку *M* и опустим от неё перпендикуляр на первую ось. Число, соответствующее точке пересечения перпендикуляра с горизонтальной осью, является первой координатой точки *M*. Точка пересечения вертикальной оси с перпендикуляром, опущенным на неё из точки *M*, определит вторую координату.

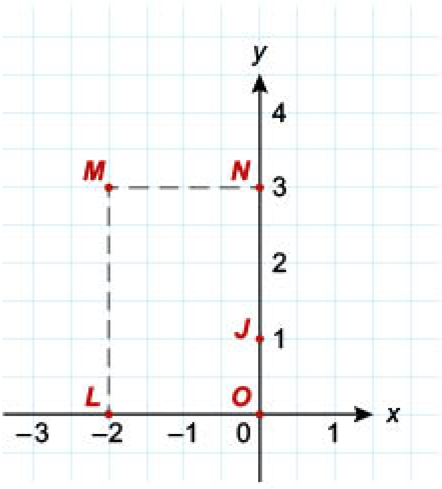


Рис. 8

Первая координата обычно обозначается x и называется **абсциссой** точки *M*, а вторая координата обозначается y и называется **ординатой** точки *M*.

Если точка лежит на первой прямой – оси *OX*, то её вторая координата равна нулю, а для точек, лежащих на оси *OY*, равна нулю первая координата.

На рисунке 8 точка *M* имеет координаты −2 и 3. Это можно записать следующим образом: $M(-2; 3)$. Также запишем точки *L* и *N*: $L(-2; 0)$, $N(0; 3)$.

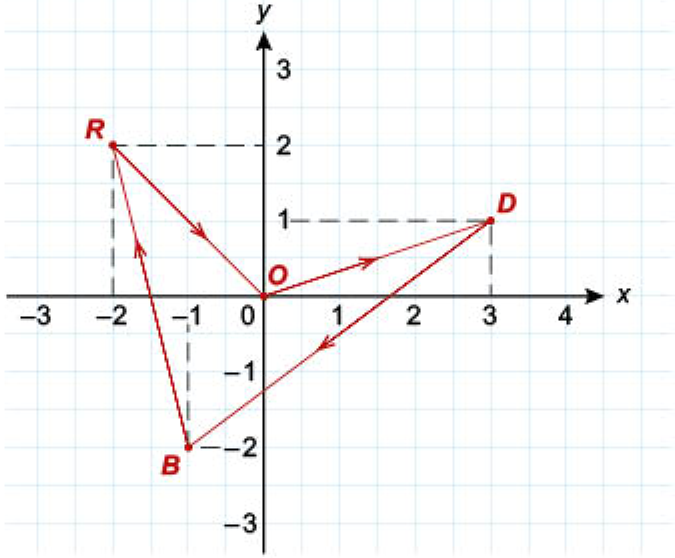


Рис. 9

Задача

Винни-Пух, домик которого находится в точке *B* с координатами (−1; −2), пошёл проведать своих друзей. Сначала он позавтракал у Кролика, который живёт в точке *R*(−2; 2). Затем он обсудил мировые проблемы с Совой в точке с координатами *O* (0; 0). Далее, он посетил ослика Иа-Иа и выразил ему свои соболезнования в связи с потерей хвостика. От Иа-Иа из точки *D*(3; 1) он вернулся домой. (Если вы изучаете английский, то легко увидите, что буквы, обозначающие точки, это первые буквы соответствующих слов: Винни-Пух – медведь – *Bear*; Кролик – *Rabbit*; Сова – *Owl*; Ослик – *Donkey*).

Предполагая, что Вини-Пух от точки к точке двигался по прямой, нарисуем маршрут (рисунок 9), по которому он двигался.

57. Серый Волк вышел из своего логова, расположенного в точке *W*(−3; 1), и, двигаясь прямо, встретил Красную Шапочку в точке *H*(1; −1). Поговорив с Красной Шапочкой, он по самой короткой дороге (а как вы знаете, самая короткая дорога – это прямая) побежал к домику бабушки, стоящему в точке *G*(4; 2). Изобразите маршрут, по которому двигался Волк.

58. Изобразите маршрут, по которому двигались лесорубы, если они, выйдя из точки *V*(−1; −3), пришли в точку *K*(2; 1), а оттуда направились к домику бабушки в точку *G*(4; 2).

3.2. Координаты точек на плоскости

Задача

Дуремар торгует пиявками (*L*) и лягушками (*F*). Результаты его деятельности отражены на рисунке 10. Разберём его.

Точка *F* указывает на то, что было продано 7 лягушек по цене 6 сольдо.

Месторасположение точки *L* говорит, что Дуремар продал 13 пиявок по цене 3 сольдо.

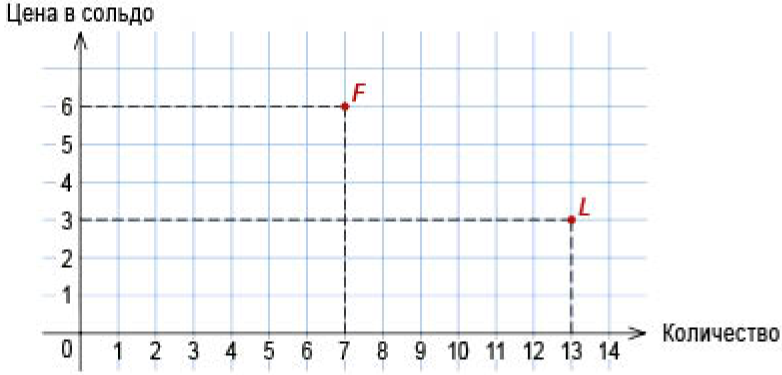


Рис. 10

59. Колобок три дня торговал пирожками. Точка *F* выражает итоги первого дня, *S* – второго, *T* – третьего. Сколько пирожков и по какой цене он продал в каждый из этих дней?

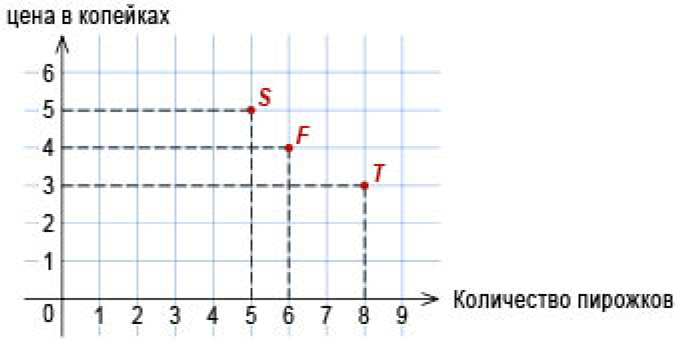


Рис. 11

60. Лиса два дня торговала рыбой. В первый день она продала 5 рыбин по цене 4 рубля, во второй день 7 рыбин по цене 3 рубля. Представьте эту информацию графически, с помощью прямоугольной системы координат.

61. Точки на координатной плоскости отражают результаты футбольного чемпионата.

Здесь на оси *G* отмечено количество голов, на оси *Q* – количество игроков, забивавших эти голы.

Точка *F* выражает итоги первого тура, *S* – второго, *T* – третьего. Сколько голов было забито в каждом из этих туров и сколько игроков забивали эти голы?

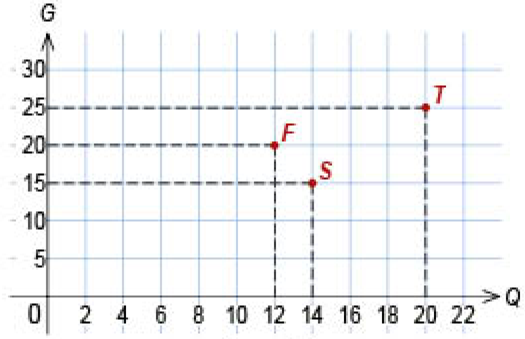


Рис. 12

62. Фермер посадил картофель на трёх полях. Площадь первого поля 20 *га*, второго поля 30 *га*, третьего поля 45 *га*. Урожайность на первом поле составила 15 тонн, на втором 30 тонн, на третьем 20 тонн. Представьте эту информацию графически, с помощью прямоугольной системы координат.

3.3. Определение точек плоскости по их координатам

Задача

1) На рисунке 13 прочитайте слова, буквы которых имеют координаты:
a) (6; −2) (2; 6) (4; 4) (−4; 4) (4; 4); b) (−3; −2) (4; 4) (2; 6) (6; −2) (2; 6);
c) (3; −4) (2; 6) (4; 4) (−4; 4) (3; −4) (2; 6) (4; 4) (−3; −2) (6; −2) (2; 6).

2) Запишите слова с помощью координат:
a) МАНАС; b) АСТАНА.

Решение

1a) Для того чтобы прочитать первую букву, переместимся вправо на 6 делений по оси *OX*, а затем на 2 деления вниз. На этом месте стоит буква К. Переместившись на 2 деления вправо и 6 делений вверх, определим, что вторая буква слова – это буква А. Продолжая действовать подобным образом, определим, что третья и пятая буквы, это буква Т, а четвертая буква – буква Е.

В результате получилось слово КАТЕТ – название стороны прямоугольного треугольника.

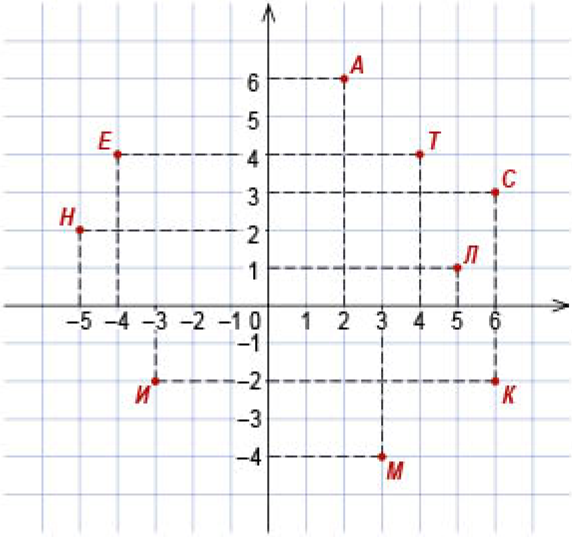


Рис. 13

1b, c) Продолжая действовать так, как описано в пункте 1a), можно узнать, что в пункте 1b) записано слово ИТАКА – это название родного острова древнегреческого героя Одиссея, а в пункте 1c) с помощью координат записано слово МАТЕМАТИКА.

2a) Для того чтобы записать слово МАНАС, найдём на рисунке точку, обозначенную буквой *M*, и поднимемся вертикально вверх до оси *OX*. Точка пересечения с осью *OX* определяет число 3. Затем из точки *M* двинемся по горизонтали, до пересечения с осью *OY*. Точка пересечения с осью *OY* определяет число −4. Тем самым, мы установили, что координаты точки *M* записываются: (3; −4). Далее, находим точку *A* и, двигаясь от неё по вертикали, определяем первую координату: 2; двигаясь по горизонтали: вторую координату – 6. Продолжив, определим координаты, соответствующие букве Н: (−5; 2) и букве С: (6; 3). Следовательно, слово МАНАС с помощью координат будет записано так: (3; −4) (2; 6) (−5; 2) (2; 6) (6; 3).

2b) Действуя так же, как в пункте 2a), можно установить, что слово АСТАНА с помощью координат будет записано так: (2; 6) (6; 3) (4; 4) (2; 6) (−5; 2) (2; 6).

63. На рисунке 13 прочитайте слова, буквы которых имеют координаты:

a) (6; −2) (5; 1) (2; 6) (6; 3) (6; 3);
b) (4; 4) (−4; 4) (6; −2) (6; 3) (4; 4).

64. Запишите с помощью координат слова:

a) КИТ; b) СКЕЛЕТ.

65. На рисунке 13 прочитайте слова, буквы которых имеют координаты:

a) (6; 3) (4; 4) (2; 6) (6; −2) (2; 6) (−5; 2);

b) (4; 4) (2; 6) (5; 1) (2; 6) (6; 3).

66. Запишите слова с помощью координат:

a) ТЕСТ; b) САНТИМ (старинная французская монета).

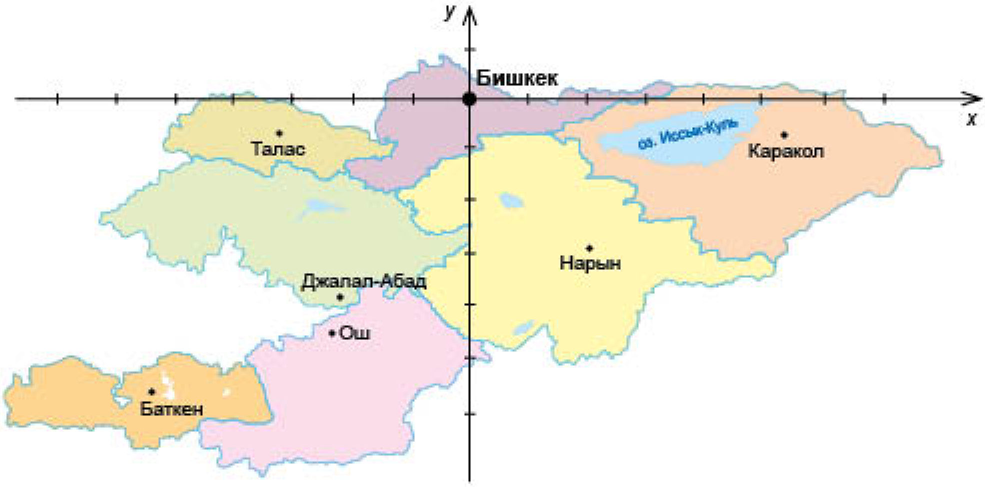
ИГРА

Задания пункта 4.3 могут послужить основой для увлекательной игры: класс делится на несколько команд. После этого выбираем 6–7 букв и располагаем их на координатной плоскости. Каждая команда должна составить как можно больше слов из указанных букв и записать их с помощью координат. Выигрывает команда, составившая наибольшее количество слов. В случае равенства количества составленных слов выигрывает команда, у которой более длинные слова, – команда, использовавшая большее количество букв.

3.4. Система координат и карта Кыргызстана

Задача

Прямоугольная система координат наложена на карту Кыргызстана.



1. Определите, какой город соответствует точке:
a) (5,3; −0,8); b) (−2,2; −3,9); c) (−3,2; −0,8); d) (−2,4; −4,5).

2. Определите координаты городов:
a) Бишкек; b) Нарын; c) Баткен.

Решение

1a) Для того чтобы попасть в город с координатами (5,3; −0,8), смещаемся на 5 делений и ещё немного (на 3 десятых) вправо по оси *OX*, а затем спускаемся вниз чуть меньше, чем на одно деление. В результате оказываемся в столице Иссык-Кульской области, городе Караколе.

1b) В город с координатами (−2,2; −3,9) попадём, если сместимся на 2 деления и ещё немного (на 2 десятых) влево по оси *OX*, а затем спустимся вниз чуть меньше, чем на четыре деления. Это город Джалал-Абад – столица одноимённой области.

1c) Город с координатами (−3,2; −0,8) – это Талас, столица Таласской области.

1d) Город с координатами (−2,4; −4,5) – это Ош, столица Ошской области.

2a) Координаты столицы нашего государства – города Бишкека – соответствуют координатам центра координатной плоскости: (0; 0).

2b) Для того чтобы определить координаты города Нарына, найдём его на карте. Затем на пересечении вертикальной линии, проходящей через эту точку с осью *OX*, определим первую координату: 2. Пересечение горизонтальной линии, проходящей через эту точку с осью *OY*, даст вторую координату: −3. Следовательно, координаты столицы Нарынской области (2; −3).

2c) Координаты столицы Баткенской области (−5,3; −5,5).

67. Определите примерные координаты вашего населённого пункта.

68. Прямоугольная система координат наложена на карту Казахстана.

1) Определите, какой город соответствует точке:
a) (4; 0); b) (−2,9; −4,8).
2) Определите, координаты города:
a) Тараз; b) Алматы.
3) Определите, какой город соответствует точке:
a) (−1,1; −6,7); b) (1,2; −1,5).
4) Определите координаты города:
a) Астана; b) Павлодар.

Примечание

Конечно, если бы географические карты составляла каждая страна по-своему и ставила бы в центр системы координат свою столицу, то, наверное, воцарился бы хаос. К счастью, людям удалось договориться, и для определения координат точки на земной поверхности используются особые, географические координаты – долгота и широта. Подробнее с ними вы познакомитесь на уроках географии.

3.5. Площадь прямоугольника

Вычисление площади многоугольника является одной из самых старых и популярных геометрических задач. Оказывается, использование координат делает эту задачу достаточно простой. Покажем это.

Задача

Вычислить площадь прямоугольника, вершины которого находятся в точках $A(2; 1)$, $B(2; 3)$, $C(5; 3)$, $D(5; 1)$.

Решение

Понятно, что расстояние от точки A до точки D равно расстоянию между точками, соответствующими числам 2 и 5 на оси OX, то есть $5 - 2 = 3$.

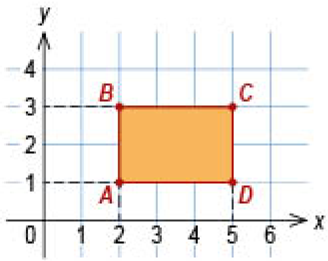


Рис. 14

Также длина отрезка AB равна расстоянию между точками, соответствующими числам 1 и 3 на оси OY, то есть $3 - 1 = 2$.

Мы говорим, что сторона AD является длиной, сторона AB – шириной прямоугольника $ABCD$.

Также говорят, что сторона AD является основанием, сторона AB – высотой прямоугольника $ABCD$.

Так как площадь прямоугольника равна произведению длины и ширины прямоугольника, другими словами, основания и высоты прямоугольника, площадь прямоугольника *ABCD* равна $3 \cdot 2 = 6$.

Полезно заметить, что прямоугольник *ABCD* состоит из 6 квадратиков, площадь каждого из них равна единице.

69. Начертите прямоугольник, вершины которого находятся в точках $E(-2; -3)$, $F(-2; 3)$, $G(5; 3)$, $H(5; -3)$, и вычислите его площадь.

70. Начертите прямоугольник, вершины которого находятся в точках $K(1; -5)$, $L(1; 3)$, $M(5; 3)$, $N(5; -5)$, и вычислите его площадь.

3.6. Площадь прямоугольного треугольника

Задача

Вернемся к прямоугольнику *ABCD* и соединим вершины *A* и *C*. Чему равна площадь треугольника *ABC*?

Отрезок, соединяющий противоположные вершины прямоугольника, называется **диагональю прямоугольника**.

Решение

Диагональ делит прямоугольник на два прямоугольных треугольника. В нашем случае это треугольники *ABC* и *ACD*. Эти треугольники одинаковы, поэтому площадь треугольника *ABC* равна площади треугольника *ACD* и равна половине площади прямоугольника *ABCD*, то есть трём: $6 : 2 = 3$.

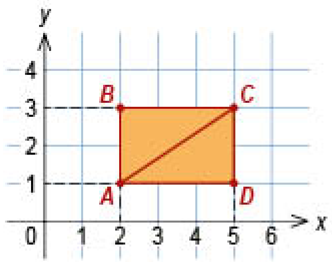


Рис. 15

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения *основания* на *высоту*.

Стороны прямоугольного треугольника, образующие прямой угол, называются **катетами**, третья сторона – **гипотенузой**.

В прямоугольном треугольнике *ABC* катетами являются стороны *AB* и *BC*, гипотенузой – сторона *AC*. Поэтому можно говорить, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов.

71. В условиях упражнения 69 вычислите площадь прямоугольного треугольника *FGH*, назовите его катеты и гипотенузу.

72. Начертите прямоугольный треугольник, вершины которого расположены в точках $I(-3;\ 1)$, $J(2;\ 1)$, $K(2;\ -3)$, вычислите его площадь, назовите его катеты и гипотенузу.

73. В условиях упражнения 70 вычислите площадь прямоугольного треугольника *KLN*, назовите его катеты и гипотенузу.

74. Начертите прямоугольный треугольник, вершины которого расположены в точках $L(-2;\ -1)$, $M(3;\ 4)$, $N(3;\ -1)$, вычислите его площадь, назовите его катеты и гипотенузу.

Далее, мы покажем, что и вычисление площадей произвольных многоугольников является довольно простой задачей, если известны координаты их вершин.

3.7. Площадь многоугольника со сторонами, параллельными осям

Задача

Вычислить площадь многоугольника, вершинами которого являются точки $P(-2;\ -2)$, $Q(-2;\ 3)$, $R(1;\ 3)$, $S(4;\ -1)$, $T(4;\ -2)$.

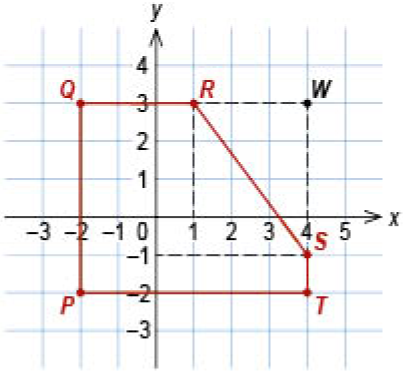


Рис. 16

Решение

Нетрудно сообразить, что площадь многоугольника *PQRST* есть разность площадей прямоугольника *PQWT* и треугольника *RWS*.

Площадь прямоугольника *PQWT*: $6 \cdot 5 = 30$;
площадь треугольника *RWS*: $0{,}5 \cdot 3 \cdot 4 = 6$.
Следовательно, площадь *PQRST*: $30 - 6 = 24$.

75. Начертите многоугольник, вершины которого находятся в точках $E(-5; -2)$, $F(-5; 4)$, $G(3; -4)$, $H(-1; -4)$, $J(-1; -2)$, и вычислите его площадь.

76. Начертите многоугольник, вершинами которого являются точки $A(2; -2)$, B $(2; 4)$, C $(6; 2)$, D $(6; -2)$, и вычислите его площадь.

3.8. Площадь треугольника

Задача

Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках L $(2; 1)$, $M(1; 4)$, $N(8; 2)$.

Решение

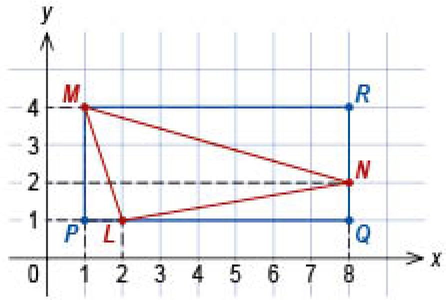


Рис. 17

Для того чтобы вычислить площадь треугольника LMN, заключим его в прямоугольник горизонтальными и вертикальными отрезками, проведёнными через вершины треугольника LMN.

В итоге получаем, что площадь треугольника LMN есть площадь прямоугольника $PMRQ$ без площадей трёх прямоугольных треугольников: PML, MRN и LNQ. А это, как мы видели ранее, очень простая задача.

Итак, площадь:
прямоугольника $PMRQ = (8 - 1) \cdot (4 - 1) = 21$;
прямоугольного треугольника $PML = 0{,}5(2 - 1) \cdot (4 - 1) = 1{,}5$;
прямоугольного треугольника $MRN = 0{,}5\,(8 - 1) \cdot (4 - 2) = 7$;
прямоугольного треугольника $LNQ = 0{,}5 \cdot (8 - 2) \cdot (2 - 1) = 3$.

Следовательно, площадь треугольника LMN равна:
$21 - 1{,}5 - 7 - 3 = 9{,}5$.

Следует отметить, что площадь фигуры обычно обозначают буквой S с соответствующими индексами. Так, в условиях задачи 3.8 площадь прямоугольника $PMRQ$ будет обозначена S_{PMRQ}; площадь треугольника PML – S_{PML}; а процесс нахождения ответа:
$S_{LMN} = S_{PMRQ} - S_{PML} - S_{MRN} - S_{LNQ}$.

77. Начертите треугольник, вершины которого находятся в точках $F(5;\ 1)$, $G(3;\ -4)$, $H(-1;\ 2)$, и вычислите его площадь.

78. Начертите треугольник, вершины которого находятся в точках $A(-1;\ -2)$, $B(5;\ 4)$, $C(6;\ 2)$, и вычислите его площадь.

3.9. Площадь четырёхугольника

Задача

«Вороне бог послал кусочек сыра...»

Так начинается одна из замечательных басен Крылова. Позднее обнаружилось, что, прибежав в свою нору, Лиса из этой басни положила кусок сыра на координатную плоскость и выяснила, что он является четырёхугольником с вершинами в точках $T(-3;\ 1)$, $U(2;\ 2)$, $V(7;\ -2)$, $W(0;\ -3)$.

Единицей измерения был сантиметр. Сколько весил весь сыр, если один квадратный сантиметр весил 7 граммов?

Решение

Оказывается, площадь четырёхугольника $TUVW$ можно вычислить так же, как площадь треугольника LMN.

Для этого начертим четырёхугольник $TUVW$ и поместим его в прямоугольник $ABCD$ с горизонтальными и вертикальными сторонами.

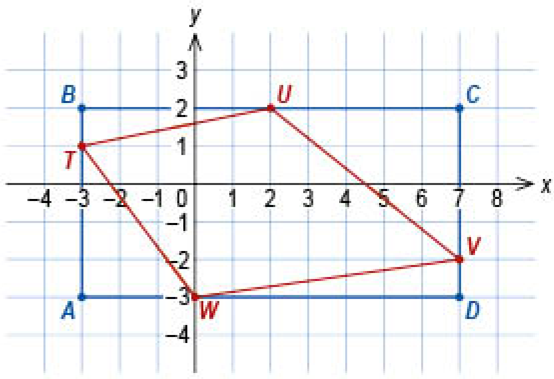


Рис. 18

Тогда для того чтобы остался четырёхугольник $TUVW$, из прямоугольника $ABCD$ нужно удалить четыре прямоугольных треугольника:

$S_{TUVW} = S_{ABCD} - S_{TBU} - S_{UCV} - S_{VDW} - S_{ATW} =$

$= 10 \cdot 5 - 0{,}5 \cdot 5 \cdot 1 - 0{,}5 \cdot 5 \cdot 4 - 0{,}5 \cdot 7 \cdot 1 - 0{,}5 \cdot 3 \cdot 4 = 28.$

Отсюда следует, что сыр весил $28 \cdot 7 = 196$ граммов.

79. Начертите четырёхугольник, вершины которого находятся в точках $E(-3; 2)$, $F(1; 5)$, $G(3; 4)$, $H(-1; 1)$, и вычислите его площадь.

80. Начертите четырёхугольник, вершины которого находятся в точках $A(1; 1)$, $B(5; 4)$, $C(6; 2)$, $D(3; 0)$, и вычислите его площадь.

3.10. Площадь произвольного треугольника

Задача

Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $U(-2; -4)$, $V(6;4)$, $W(4; -2)$.

Решение

Решение начнём стандартным образом: заключим треугольник UVW в прямоугольный треугольник UVZ.

В результате видим, что нам нужно «удалить» четырёхугольник $UWVZ$. Эта задача довольно проста, если провести горизонтальный отрезок WK и вертикальный отрезок WL, разбив тем самым четырёхугольник на два прямоугольных треугольника и прямоугольник.

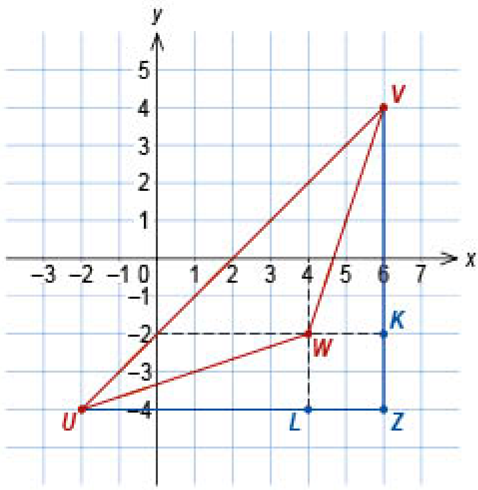


Рис. 19

В итоге получаем:

$S_{UWVZ} = S_{UWL} + S_{WVK} + S_{WKZL} = 0{,}5 \cdot 2 \cdot 6 + 0{,}5 \cdot 6 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 16.$

Следовательно, $S_{UVW} = S_{UVZ} - S_{UWVZ} = 0{,}5 \cdot 8 \cdot 8 - 16 = 32 - 16 = 16.$

81. Начертите четырёхугольник, вершины которого находятся в точках $E(-2; -2)$, $F(2; 5)$, $G(4; 4)$, $H(3; 0)$, и вычислите его площадь.

82. Начертите треугольник, вершины которого находятся в точках $A(-1; 5)$, $B(3; 3)$, $C(4; 1)$, и вычислите его площадь.

3.11. Площадь многоугольника

Задача

Лев, Волк и Заяц купили необычную плитку шоколада: она представляет собой пятиугольник с вершинами $A(-5; 3)$, $B(0; 1)$, $C(7; 4)$, $D(5; -5)$, $E(-3; -5)$.

Лев разломил шоколадку по линии BI и забрал себе кусок $ABIE$, заявив, что он равен третьей части исходной плитки. Прав ли Лев?

Решение

Для того чтобы получить ответ, нужно вычислить площадь пятиугольника $ABCDE$ и площадь четырёхугольника $ABIE$.

Решение начнём стандартно: проведём через крайние точки горизонтальные и вертикальные отрезки и заключим $ABCDE$ в прямоугольник $KCFG$.

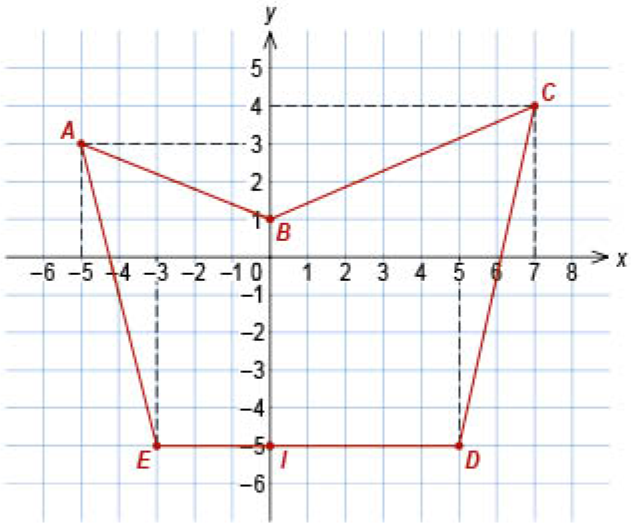


Рис. 20

Прямоугольник $KCFG$ имеет площадь $12 \cdot 9 = 108$, площадь прямоугольного треугольника AEG равна $0,5 \cdot 2 \cdot 8 = 8$, площадь прямоугольного треугольника DCF равна $0,5 \cdot 2 \cdot 9 = 9$.

Для того чтобы вычислить площадь четырёхугольника $AKCB$, можно провести отрезок AH и отметить точку J. Тогда получится прямоугольный треугольник AHB с площадью $0,5 \cdot 2 \cdot 5 = 5$; прямоугольный треугольник JCB с площадью $0,5 \cdot 3 \cdot 7 = 10,5$; прямоугольник $AKJH$ с площадью $5 \cdot 1 = 5$.

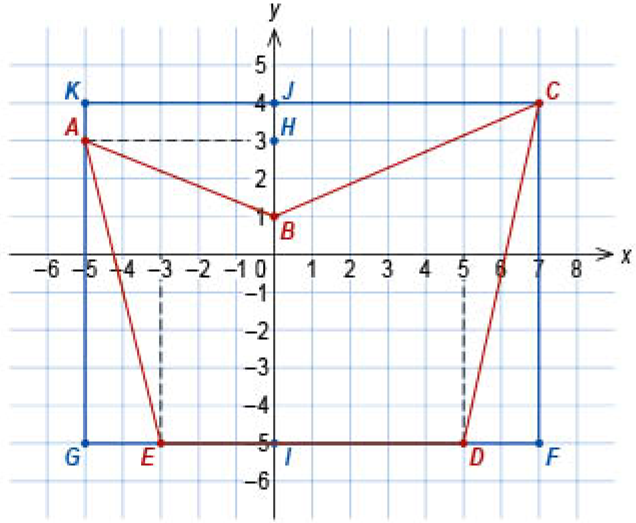


Рис. 21

Следовательно, площадь четырёхугольника $AKCB$ равна 20,5, а площадь пятиугольника $ABCDE$:

$S_{ABCDE} = S_{KCFG} - S_{AEG} - S_{DCF} - S_{AKCB} = 108 - 8 - 9 - 20{,}5 = 70{,}5.$

Площадь четырёхугольника $ABIE$ можно получить так:

$S_{AHIG} - S_{AHB} - S_{AEG} = 5 \cdot 8 - 5 - 8 = 27.$

Итак, Лев отломил себе кусок шоколадки площадью 27, а так как $27 \cdot 3 = 81$ заметно больше, чем 70,5, Лев взял себе «львиную долю» – больше, чем третью часть.

83. Начертите четырёхугольник, вершины которого находятся в точках $E(-2; -1)$, $F(-3; 2)$, $G(0; 1)$, $H(6; 2)$, и вычислите его площадь.

84. Начертите пятиугольник, вершины которого находятся в точках $A(-1; -2)$, $B(-3; 3)$, $C(2; 5)$, $D(5; -1)$, $E(3; 0)$, и вычислите его площадь.

3.12. Вычисление площади прямоугольника по его периметру

Задача

Вычислите площадь прямоугольника с вершинами в точках $U(-4; -2)$, $V(-4; b)$, $W(2; b)$, $Z(2; -2)$, зная, что его периметр равен 27.

Решение

Основание прямоугольника $UVWZ$ равно $2 - (-4) = 6$.
Так как периметр равен 27, высота равна $(27 - 2 \cdot 6) : 2 = 7{,}5$.

Поэтому площадь прямоугольника $UVWZ$ равна $6 \cdot 7{,}5 = 45$.

(Из решения следует, что для нас не важно конкретное значение числа b.)

85. Вычислите площадь прямоугольника, вершины которого находятся в точках $E(e; -7)$, $F(e; -3)$, $G(1; -3)$, $H(1; -7)$, зная, что его периметр равен 15.

86. Вычислите площадь прямоугольника, вершины которого находятся в точках $A(2; a)$, $B(2; 8)$, $C(7; 8)$, $D(7; a)$, зная, что его периметр равен 40.

87. Сочините две задачи, подобные задачам, рассмотренным в данном параграфе.

1. На рисунке 22 прочитайте слова, буквы которых имеют координаты:

a) $(-3; -1)$ $(1; 2)$ $(-2; -3)$ $(5; 3)$;
b) $(-3; 4)$ $(5; 3)$ $(-2; 1)$ $(1; 2)$ $(-3; -1)$ $(5; 3)$;
c) $(-3; 4)$ $(1; 2)$ $(-2; 1)$ $(5; 3)$ $(-3; -1)$.

2. Запишите с помощью координат слова:

a) ЧИТА; b) КЛИНИКА; c) ОТЛИЧНИК; d) ТОКМАК.

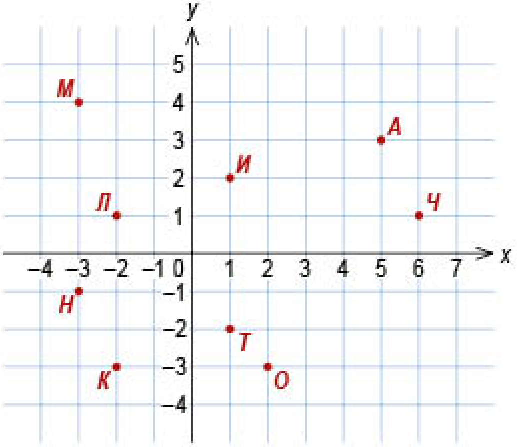


Рис. 22

3. Начертите прямоугольник с вершинами в точках $E(-2; -1)$, $F(-2; 2)$, $G(5; 2)$, $H(5; -1)$ и вычислите его площадь.

4. Вычислите площадь и назовите катеты и гипотенузу прямоугольного треугольника, который получится, если соединить точку F с точкой $I(3; -1)$.

5. Вычислите площадь и назовите катеты и гипотенузу прямоугольного треугольника, который получится, если соединить точку F с точкой $J(-5; -2)$.

6. Начертите прямоугольник с вершинами в точках $K(-1; 4)$, $L(-1; 8)$, $M(5; 8)$, $N(5; 4)$ и вычислите его площадь.

7. Вычислите площадь и назовите катеты и гипотенузу прямоугольного треугольника, который получится, если соединить точку M с точкой $P(-1; 5)$.

8. Вычислите площадь и назовите катеты и гипотенузу прямоугольного треугольника, который получится, если соединить точку M с точкой $R(-3; 4)$.

9. Вычислите площадь прямоугольника с вершинами в точках $E(-2; -3)$, $F(-2; 1)$, $G(g; 1)$, $H(g; -3)$, зная, что его периметр равен 20.

10. Вычислите площадь прямоугольника с вершинами в точках $A(1; 3)$, $B(1; b)$, $C(5; b)$, $D(5; 3)$, зная, что его периметр равен 21.

11. Вычислите площадь треугольника, вершины которого расположены в точках $E(-3; 1)$, $F(2; 3)$, $G(7; -3)$.

12. Вычислите площадь треугольника, вершины которого расположены в точках $L(-2; 3)$, $M(5; 5)$, $N(2; 1)$.

13. Вычислите площадь треугольника, вершины которого расположены в точках $P(-2; -1)$, $Q(-1; 2)$, $R(4; 4)$.

14. Вычислите площадь четырёхугольника, вершины которого находятся в точках $E(-2; 1)$, $F(2; 4)$, $G(5; 1)$, $H(1; -2)$.

15. Вычислите площадь четырёхугольника, вершины которого находятся в точках $K(-2; -2)$, $L(1; 4)$, $M(5; 3)$, $N(3; -1)$.

16. Начертите пятиугольник, вершины которого расположены в точках $P(-4; 1)$, $Q(-2; 3)$, $R(7; -1)$, $S(7; -3)$, $T(2; -4)$, и вычислите его площадь.

§ 4. Прямо пропорциональная зависимость. Пропорции

4.1. Связь между расстоянием и временем

Задача

Автомобиль едет со скоростью 80 *км/час*. Сколько километров он проедет за: a) 3 часа; b) 4,5 часа; c) 5 часов 15 минут?

Решение

a) За 3 часа автомобиль проедет: $80 \cdot 3 = 240$ *км*.

b) За 4,5 часа: $80 \cdot 4{,}5 = 360$ *км*.

c) Предварительно нужно перевести минуты в часы. Так как в каждом часе 60 минут, 15 минут – это $15 : 60 = 0{,}25$ часа. Следовательно, за 5 часов 15 минут автомобиль проедет: $80 \cdot 5{,}25 = 420$ километров.

Решение можно обобщить, написав формулу $S = 80t$.

Здесь S – расстояние, которое проедет автомобиль за время t.

Подставляя в эту формулу значения времени, мы можем узнавать, сколько километров проехал автомобиль за это время.

Так, за 3 часа 12 минут автомобиль проедет $80 \cdot 3{,}2 = 256$ *км*, потому что 12 минут – это $12 : 60 = 0{,}2$ часа.

88. Караван проходит 45 *км* за сутки. Сколько километров он пройдет за: a) 4 суток; b) 2,4 суток; c) 3 суток и 6 часов?

89. Спортсмен бежит со скоростью 420 *м/мин*. Сколько метров он пробежит за:

a) 2 минуты; b) 1,45 минуты; c) 3 минуты 18 секунд?

4.2. Связь между расстоянием и скоростью

Задача

Джамиля ежедневно ходит в течение полутора часов. Сколько километров она пройдёт, если будет двигаться со скоростью:
a) 4 *км/час*; b) 90 *м/мин*; c) 1,4 *м/сек*?

Решение

Все ответы можно получить, используя формулу $S = 1{,}5v$.

Здесь S – длина пути, который пройдёт Джамиля за 1,5 часа, если будет двигаться со скоростью v.

Так, в случае a) $S = 1,5 \cdot 4 = 6$ *км*.

В оставшихся случаях необходимо предварительно выразить скорость в *км/час*.

В случае *b*), умножив на 60, узнаем, сколько метров она пройдёт за 1 час: $90 \cdot 60 = 5400$ *м/час*.

Далее, разделив полученное число на 1000, узнаем скорость в *км/час*: $5400 : 1000 = 5,4$ *км/час*.

Следовательно, $S = 1,5 \cdot 5,4 = 8,1$ *км*.

В случае c) поступим аналогично:

$1,4 \cdot 3600 = 5040$ *м/час* $= 5,04$ *км/час*, тогда $S = 1,5 \cdot 5,04 = 7,56$ *км*.

90. Гусеница ползла в течение 30 минут. Сколько метров она проползла, если двигалась со скоростью:

a) 12 *м/ч*; b) 32 *см/мин*; c) 1,7 *мм/сек*?

91. Толобек решил совершить 45-минутную поездку на автомобиле. Сколько километров он проедет, если будет двигаться со скоростью:

a) 74 *км/ч*; b) 925 *м/мин*; c) 25 *м/сек*?

92. Составьте и решите две задачи, используя данные из таблицы.

Расстояние		
Скорость	88 *км/час*	6,7 *м/мин*
Время	6 часов 24 минуты	45 секунд

4.3. Связь между работой и временем

Задача

Производительность труда швейного цеха равна 5,4 сорочки за час. Сколько сорочек будет изготовлено: a) за 4 часа; b) за 5 часов 48 минут; c) за 2 недели, если рабочая неделя состоит из 5 дней по 8 часов?

Примечание

Не стоит смущаться при виде нецелого числа сорочек. Например, производительность труда 5,4 сорочки за час может иметь место, если 5 работников изготовят за час 27 сорочек.

Решение

Все ответы можно получить, используя формулу $A = 5,4t$, где A – объём выполненной работы за время t.

Тогда в случае а) $A = 5{,}4 \cdot 4 = 21{,}6$ сорочки.

В оставшихся случаях необходимо перевести указанное время в рабочие часы.

В случае b) 48 минут – это $48 : 60 = 0{,}8$ часа.

Следовательно, $A = 5{,}4 \cdot 5{,}8 = 31{,}32$ сорочки.

В случае с) количество рабочих дней равно $2 \cdot 5 = 10$, соответственно, количество рабочих часов: $10 \cdot 8 = 80$, тогда $A = 5{,}4 \cdot 80 = 432$ сорочки.

93. Рабочий изготавливает 10,2 детали в час. Сколько деталей он изготовит за:

а) 2,5 часа; b) 4 часа 6 минут?

94. Тракторист отработал 6 часов 30 минут. Сколько гектаров (*га*) земли он вспахал, если производительность его труда:

а) 8,2 *га / час*; b) 11 *га / час*?

95. Экскаватор копает 7 метров 3 дециметра канавы в час. Сколько метров он выкопает за:

а) 8 часов; b) 3 часа 15 минут?

96. Машинистка проработала 7,6 часа. Сколько страниц текста она напечатала, если производительность её труда:

а) 15 *стр. / час*; b) 22,1 *стр. / час*?

97. Составьте и решите две задачи, используя данные из таблицы.

Работа		
Производительность	8,7 юбки/час	6 столов/месяц
Время	6 часов 9 минут	1 квартал и 2 месяца

4.4. Экономия от утепления окон

Задача

Марина определила, что утепление окон на зиму позволяет уменьшить расходы на отопление на 15%. Сколько сомов может быть сэкономлено, если предполагаемые расходы без утепления равны:

а) 4250 сомов; b) 5408 сомов 8 тыйынов?

Решение

Вспомним, что один процент означает сотую часть числа. Поэтому для того, чтобы решить задачу, достаточно вычислить 15 сотых от заданного числа, другими словами, умножить заданное число на 0,15. Итак, ответ в случае:

a) $0{,}15 \cdot 4250 = 637{,}5$ сома;

b) $0{,}15 \cdot$ (5408 сомов 8 тыйынов) $= 0{,}15 \cdot 5408{,}08 = 811{,}212$ сома.

Процесс вычисления можно обобщить формулой $s = 0{,}15C$, где буквой s обозначена величина экономии, буквой C – предполагаемые расходы без утепления.

Рис. 23

98. Стёпа подсчитал, что утепление окон и дверей на зиму позволяет уменьшить расходы на отопление на 18%. Сколько сомов в этом случае будет истрачено на отопление, если предполагаемые расходы без утепления равны:

a) 3500 сомов; b) 6240 сомов 50 тыйынов?

99. Динура определила, что новая стиральная машина позволит уменьшить расходы на стиральный порошок на 25%. Сколько сомов будет сэкономлено за полгода, если её ежемесячные расходы на стиральные порошки равны:

a) 340 сомов; b) 620 сомов 40 тыйынов?

4.5. Прямо пропорциональная зависимость

Надеемся, что вы уже обратили внимание на то, что, несмотря на внешние различия, в пунктах 4.1–4.4 речь фактически шла об одном и том же. Давайте обобщим эти ситуации.

Две величины называются прямо пропорциональными, если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Или несколько иначе:

Если две величины связаны между собой так, что с изменением значения одной из них соответствующее значение другой изменяется во столько же раз, то такие величины называются **прямо пропорциональными**.

Это же на языке формул:

Зависимость между величинами x и y, которую можно выразить формулой

$$y = ax, \tag{1}$$

где a – ненулевое число, называется **прямо пропорциональной зависимостью**.

Число a в этом случае называется **коэффициентом пропорциональности** между величинами x и y.

Задача

Как известно, выручка R от продажи некоторого товара выражается формулой $R = p \cdot q$, где p – цена товара, q – количество товара. Имеет ли здесь место прямо пропорциональная зависимость?

Решение

Если задана цена товара, например, порция мороженого стоит 20 сомов, то выручка продавца мороженого выразится формулой $R = 20q$. То есть мы имеем формулу (1), только в данном случае на месте y стоит R, на месте a стоит 20, на месте x стоит q.

Следовательно, между выручкой и количеством товара имеется прямо пропорциональная зависимость.

Точно так же, рассматривая ситуацию, в которой продавец продаёт одно и то же количество товара по разным ценам, обнаружим прямо пропорциональную зависимость между выручкой и ценой. Например, предположим, что Шабдан каждую неделю продает 3 компьютера. Тогда имеет место формула $R = 3p$, то есть формула (1), где на месте y стоит R, на месте a стоит 3, на месте x стоит p.

100. Определите, какого вида прямо пропорциональные зависимости могут иметь место при рассмотрении формулы: $A = P \cdot t$, где A – объём выполненной работы за время t при производительности труда P.

101. Определите, какого вида прямо пропорциональные зависимости могут иметь место при рассмотрении формулы: $S = v \cdot t$, где S – расстояние, преодолённое за время t при скорости v.

4.6. Пропорция

Нам известно, что частное от деления одного числа на другое также называется их **отношением**. Отношение показывает, во сколько раз первое число больше второго, или какую часть первое число составляет от второго. Если значения двух величин выражены одной и той же единицей измерения, то их отношение называют также отношением этих величин (отношением длин, скоростей и т. д.). Частное двух чисел или выражений, в котором знак деления обозначен чертой, называется дробным выражением.

Итак, слова **частное** и **отношение** обозначают одно и то же понятие. Как правило, говоря «частное», имеют в виду одно число, являющееся результатом деления. Когда же говорят «отношение», имеют в виду пару чисел, соединённых знаком деления.

Пропорцией называется равенство двух отношений.

Общий вид пропорции: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, или $a : b = c : d$.

Пропорция состоит из четырёх членов. Первый и последний члены, то есть члены a и d, называются **крайними**, а члены b и c называются **средними**.

Примеры пропорций:

$\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$; 6 : 25 = 24 : 100; 16 *кг* : 5 *кг* = 48 сомов : 15 сомов.

Задача

Проверьте, составляют ли пропорцию отношения:

a) 4 : 2 и 7,2 : 3,6;

b) 5,05 : 101 и 4,8 : 960;

c) 1,23 : 4,56 и 7,89 : 29,33;

d) 11 : 14 и 77 : 98.

Решение

a) Составляют, потому что 4 : 2 = 2 и 7,2 : 3,6 = 2.

b) Нет, так как 5,05 : 101 = 0,05 не равно 4,8 : 960 = 0,005.

c) Прямое вычисление в данном случае не очень удобно, так как левое отношение равно бесконечной десятичной дроби:

1,23 : 4,56 = 0,269...

Примерно столько же получается и в правом отношении:

7,89 : 29,33 = 0,269...

Продолжая делить, можно увидеть, что левое отношение больше правого.

Но в этом и многих других случаях для проверки удобнее воспользоваться **основным свойством пропорции**, так как

$a : b = c : d$, получаем, что $a \cdot d = b \cdot c$.

Это же словами: *произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов.*

Если в верной пропорции поменять местами средние члены или крайние члены, то получающиеся новые пропорции тоже верны.

Итак, согласно основному свойству пропорции, отношения
1,23 : 4,56 и 7,89 : 29,33 составляют пропорцию, если
$1,23 \cdot 29,33 = 4,56 \cdot 7,89$.
Но это неверно, потому что
$1,23 \cdot 29,33 = 36,0759$, а $4,56 \cdot 7,89 = 35,9784$.

Примечание

Для того чтобы убедиться в том, что произведения не равны друг другу, не обязательно производить умножение. Достаточно заметить, что в первом случае произведение заканчивается на 9, а во втором – на 4.

d) Так как $11 \cdot 98 = 1078$ и $14 \cdot 77 = 1078$, согласно основному свойству пропорции, получаем, что имеет место пропорция.

102. Проверьте, составляют ли пропорцию отношения.

a) 6,04 : 3,02 и 17,2 : 34,4
b) 16,5 : 1,1 и 48 : 3,2
c) 1,3 : 0,7 и 39 : 21
d) 11 : 1,4 и 70,714 : 9

103. Проверьте, составляют ли пропорцию отношения.

a) 41 : 0,2 и 738 : 3,6
b) 53,52 : 0,4 и 4014 : 30
c) 1,2 : 9 и 4,4 : 33
d) 110 : 194 и 7371 : 13000

4.7. Простейшее уравнение в виде пропорции

104. Составьте две разные пропорции, у которых левые части одинаковы. Например, 1,2 : 4,5 = 4 : 15 и 1,2 : 4,5 = 6 : 22,5.

Что вы можете сказать об их правых сторонах?
Сформулируйте полученный результат в общем виде.

Задача

Решите уравнения:

a) $\frac{x+2}{4} = \frac{7}{5}$; b) $\frac{5}{0,3} = \frac{2x-7}{6}$.

Решение

В каждом предложенном случае уравнение записано в виде пропорции. Поэтому будет уместно воспользоваться основным свойством пропорции.

a) Пропорция $\frac{x+2}{4}=\frac{7}{5}$ даёт уравнение $(x + 2) \cdot 5 = 4 \cdot 7$. Раскрываем скобки: $5x + 10 = 28$, приводим подобные члены: $5x = 18$ и получаем, что $x = 3{,}6$.

Для того чтобы сделать проверку, подставим значение x и вычислим величину отношения:

$\frac{3{,}6+2}{4}=\frac{5{,}6}{4}=1{,}4$.

Так как и правая часть пропорции равна этому числу: $7 : 5 = 1{,}4$, убеждаемся в том, что уравнение решено правильно.

b) Пропорция $\frac{5}{0{,}3}=\frac{2x-7}{6}$ даёт уравнение $5 \cdot 6 = 0{,}3\,(2x - 7)$.

Раскрываем скобки: $30 = 0{,}6x - 2{,}1$, приводим подобные члены:

$0{,}6x = 32{,}1$ и получаем, что $x = 53{,}5$.

Для проверки, подставив значение $x = 53{,}5$ в уравнение $5 \cdot 6 = 0{,}3\,(2x - 7)$, получим верное равенство

$30 = 0{,}3\,(2 \cdot 53{,}5 - 7)$; $30 = 0{,}3\,(107 - 7)$.

105. Решите уравнения:

a) $\frac{2}{3-x}=\frac{4}{11}$; b) $\frac{13}{0{,}5}=\frac{12x-10}{16}$.

106. Решите уравнения:

a) $\frac{x+2{,}1}{0{,}4}=\frac{1{,}7}{5}$; b) $\frac{5{,}1-3x}{9}=\frac{2{,}3}{6}$.

107. Определите, произведя вычисления «в уме», имеет ли уравнение $\frac{237{,}89-1289{,}78}{34569}=\frac{x}{345{,}65}\cdot 6256$ положительный корень?

4.8. Уравнение в виде пропорции

Задача

Решите уравнения:

a) $\frac{2{,}8}{4-3x}=\frac{7}{31}$; b) $\frac{2x+21}{14-2x}=\frac{7}{3}$.

Решение

И в этих случаях будет уместно воспользоваться основным свойством пропорции.

a) Пропорция $\frac{2,8}{4-3x} = \frac{7}{31}$ даёт уравнение $2,8 \cdot 31 = (4 - 3x) \cdot 7$.

Раскрываем скобки: $86,8 = 28 - 21x$, приводим подобные члены: $21x = -58,8$ и получаем, что $x = -2,8$.

Для проверки используем основное свойство пропорции:

$(4 - 3x) \cdot 7 = (4 - 3 \cdot (-2,8)) \cdot 7 = (4 + 8,4) \cdot 7 = 12,4 \cdot 7 = 86,8.$

b) Пропорция $\frac{2x+21}{14-2x} = \frac{7}{3}$ даёт уравнение $(2x + 21)3 = (14 - 2x)7$.

Раскрываем скобки: $6x + 63 = 98 - 14x$, приводим подобные члены:

$6x + 14x = 98 - 63$; $20x = 35$ – и получаем, что $x = 1,75$.

Подставив найденное значение x в уравнение $(2x + 21)3 = (14 - 2x)7$ и произведя необходимые вычисления:

$(2 \cdot 1,75 + 21)3 = (14 - 2 \cdot 1,75)7$; $(3,5 + 21)3 = (14 - 3,5)7$;

$24,5 \cdot 3 = 10,5 \cdot 7$; $73,5 = 73,5$,

убеждаемся в том, что уравнение решено правильно.

108. Решите уравнения:

a) $\frac{4x}{5} = \frac{7}{8}$; b) $\frac{8}{3} = \frac{19}{3-11x}$; c) $\frac{2-3x}{11+2x} = \frac{7}{2}$.

109. Решите уравнения:

a) $\frac{11}{16x} = \frac{2}{5}$; b) $\frac{18}{1+5x} = \frac{4}{3}$; c) $\frac{12x+1}{4-3x} = \frac{50}{-4}$.

4.9. Прямо пропорциональная зависимость и пропорция

Задача

Санал продал 14 футболок за 4760 сомов. Сколько сомов он получит за 9 таких футболок?

Решение

Решается достаточно просто: сначала найдём цену одной футболки: $4760 : 14 = 340$ сомов, а затем выручку от продажи 9 футболок: $340 \cdot 9 = 3060$ сомов.

Отношения $4760 : 14$ и $3060 : 9$ равны одному и тому же числу, то есть составляют пропорцию.

В этом нет ничего удивительного. Между выручкой от продажи футболок и количеством проданных футболок имеется прямо пропорциональная зависимость, выражающаяся в данном случае формулой $R = 340q$. Отсюда сразу следует, что отношение выручки к количеству товара всегда есть одно и то же число: $\frac{R}{q} = 340$. Поэтому отношение выручки к соответствующему количеству товара образует пропорцию с отношением другой выручки к соответствующему ей количеству товара.

Задача

Асель купила 7 порций мороженого за 126 сомов. Сколько сомов она заплатит за 11 порций?

Решение

Приняв во внимание, что имеет место пропорция, напишем уравнение:

$$\frac{126}{7} = \frac{x}{11}.$$

Здесь x – искомая выручка.

Тогда $126 \cdot 11 = 7x$ и $x = 1386 : 7 = 198$.

110. Двигаясь равномерно, Оля преодолела 798 метров со скоростью 63 *м/мин*. Сколько метров за это время преодолел Коля, двигавшийся со скоростью 84 *м/мин*?

111. Парикмахерская за 3 часа обслуживает 26 клиентов. Сколько клиентов будет обслужено за 2 часа 6 минут?

112. Двигаясь равномерно, Олег преодолел 798 метров за 7 минут. Сколько метров он преодолел за 4 минуты?

113. Бригада швей при производительности 8 сорочек в час сшила 2816 сорочек. Какой была производительность другой бригады, сшившей за это же время 2288 сорочек?

4.10. Пропорция и прямо пропорциональная зависимость

Обсуждая игры любимой футбольной команды, Бакыт заметил, что после трёх игр у «Реала» было 6 очков, после семи игр – 14 очков. «Правда, я забыл, сколько очков было у них после четырёх игр», – сказал он. Стоявший недалеко Незнайка услышал слова Бакыта и включился в разговор, сказав, что это совсем просто: «Так как отношение трёх игр к 6 очкам равно отношению семи игр к 14 очкам, имеет место пропорция. Поэтому между количеством очков и соответствующим количеством игр прямо пропорциональная зависимость: количество очков = 2 · количество игр. Отсюда получаем, что после четырёх игр «Реал» имел 8 очков». В ответ на это Полина сказала, что Незнайка не прав. Так как за победу в футбольном матче команда получает три очка, за ничью – одно очко и не получает очков в случае поражения, команда после шести очков не может сразу иметь 8 очков. Найдите ошибку в рассуждениях Незнайки.

Разобравшись, мы можем сформулировать правило.

Если две величины прямо пропорциональны, то отношения соответствующих значений этих величин равны.

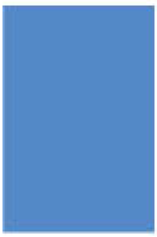
Или, другими словами:

Если между величинами имеется прямо пропорциональная зависимость, то любые два отношения значений этих величин образуют пропорцию.

Обратное утверждение является неверным, то есть если два отношения значений некоторых величин образуют пропорцию, то эти величины не обязательно находятся в прямо пропорциональной зависимости.

Если величины обратно пропорциональны, то отношение значений одной величины равно обратному отношению соответствующих значений другой величины.

Задача



Основание прямоугольника – 4 *см*, высота – 6 *см*. Определите его площадь и периметр.

Определите площадь и периметр прямоугольника с таким же основанием и высотой: a) меньшей в 2 раза; b) большей в 1,5 раза; c) большей в 2 раза; d) большей в 5 раз.

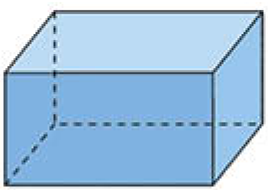
Укажите, между какими величинами имеет место прямо пропорциональная зависимость, и, если она есть, напишите соответствующую формулу.

Решение

Площадь прямоугольника равна произведению основания и высоты, периметр равен сумме длин сторон. Поэтому площадь исходного прямоугольника: $4 \cdot 6 = 24$ *см*^{2}; периметр: $4 + 6 + 4 + 6 = 2(4 + 6) = 20$ *см*.

Соответственно, в случае

a) площадь: $4 \cdot (6 : 2) = 12$ *см*^{2};
периметр: $4 + 6 : 2 + 4 + 6 : 2 = 2(4 + 3) = 14$ *см*;
b) площадь: $4 \cdot (6 \cdot 1{,}5) = 36$ *см*^{2};
периметр: $4 + 6 \cdot 1{,}5 + 4 + 6 \cdot 1{,}5 = 2(4 + 9) = 26$ *см*;
c) площадь: $4 \cdot (6 \cdot 2) = 48$ *см*^{2};
периметр: $4 + 6 \cdot 2 + 4 + 6 \cdot 2 = 2(4 + 12) = 32$ *см*;
d) площадь: $4 \cdot (6 \cdot 5) = 120$ *см*^{2};
периметр: $4 + 6 \cdot 5 + 4 + 6 \cdot 5 = 2(4 + 30) = 68$ *см*.



Проследив за соответствующими изменениями площади и периметра, можно заметить, что между площадью прямоугольника и его высотой имеет место прямо пропорциональная зависимость: $S = 4h$, где S – площадь прямоугольника, h – высота. В то же время такой зависимости между периметром прямоугольника и его высотой нет.

114. У прямоугольного параллелепипеда длина – 8 *см*, ширина – 5 *см*, высота – 16 *см*. Определите его объём и площадь полной поверхности.

Определите объём и площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда с таким же основанием и высотой: a) меньшей в 4 раза; b) большей в 2,5 раза; c) большей в 5 раз.

Укажите, между какими величинами имеет место прямо пропорциональная зависимость, и, если она есть, напишите соответствующую формулу.

115. У прямоугольного параллелепипеда длина – 4 *м*, ширина – 1 *м*, высота – 2,1 *м*. Определите длину его каркаса и площадь боковой поверхности.

Определите длину каркаса и площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда с таким же основанием и высотой: a) меньшей в 3 раза; b) большей в 2 раза; c) большей в 7 раз.

Укажите, между какими величинами имеет место прямо пропорциональная зависимость, и, если она есть, напишите соответствующую формулу.

Наличие прямо пропорциональной зависимости сильно облегчает решение соответствующих проблем. Поэтому важно знать ситуации, в которых она встречается.

Итак, прямо пропорциональная зависимость имеется между:

- расстоянием и временем при равномерном движении;
- расстоянием и скоростью, с которой пройдено это расстояние за фиксированное время;
- работой и временем, за которое она выполнена при одинаковой производительности труда;
- работой и производительностью труда, с которой она выполнена за фиксированное время;
- выручкой и количеством товара, проданного по постоянной цене;
- выручкой и ценой товара, по которой куплено фиксированное количество товара;
- площадью и одним из измерений прямоугольника;
- объёмом и одним из измерений прямоугольного параллелепипеда.

Это далеко не полный список, и мы будем время от времени его пополнять.

116. Для случаев, в которых имеет место прямо пропорциональная зависимость, напишите соответствующие формулы, сочините и решите задачу, используя эти формулы.

4.11. Обратно пропорциональная зависимость

Две величины называются обратно пропорциональными, если при увеличении одной из них во столько же раз уменьшается другая. Соответственно, при уменьшении одной из них во столько же раз увеличивается другая.

Зависимость между такими величинами – обратно пропорциональная зависимость.

Задача

а) Марина приехала из Бишкека в Ош за 10 часов со средней скоростью 64 *км/ч*. С какой средней скоростью она ехала обратно, если затратила на дорогу 12,8 часов?

b) Ольга и Галина прорешивают упражнения из нового учебника математики. На 400 задач Ольга затратила 16 часов. Галина проверяла на 5 задач в час меньше. Кто затратил больше времени? Сколько времени затратила Галина на 400 задач?

с) Прямоугольные треугольники ABC и KLM имеют одинаковую площадь. При этом катет AB длиннее катета KL. Сравните катеты BC и LM.

Решение

а) Так как Марина затратила больше времени, получается, что она ехала медленнее. Для того чтобы узнать конкретное число, можно действовать следующим образом. Выясним расстояние, которое она преодолела: $64 \cdot 10 = 640$ километров. Отсюда получим среднюю скорость, с которой она ехала обратно: $640 : 12{,}8 = 50$ *км/ч*. (Позднее Марина рассказала, что они несколько раз останавливались, чтобы полюбоваться красивой природой.)

b) Так как Галина в час проверяла меньше задач, понятно, что она затратила больше времени. Ольга прорешивала: $400 : 16 = 25$ задач в час. Соответственно, Галина: $25 - 5 = 20$ задач в час. Отсюда получаем, что Галина на 400 задач затратила: $400 : 20 = 20$ часов.

с) Как было отмечено ранее, площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов. Поэтому, катет BC короче катета LM.

Примеры обратно пропорциональной зависимости:

- время, затраченное на прохождение определённого пути, и скорость, с которой этот путь был пройден, – обратно пропорциональные величины;
- при одинаковой производительности труда количество рабочих, выполняющих определённую работу, обратно пропорционально времени выполнения этой работы;
- количество товара, купленного на определённую сумму денег, обратно пропорционально его цене и т. п.

117. 24 человека за 5 дней пропололи участок. За сколько дней выполнит ту же работу 30 человек, если будут работать с той же производительностью?

118. Через первую трубу, со скоростью 2 литра в секунду, бассейн можно заполнить за 45 минут. Какова скорость наполнения через второй насос, если для заполнения бассейна в этом случае потребуется на полчаса больше?

119. Параллелепипеды Альфа и Бета имеют одинаковый объём. При этом площадь основания Альфы меньше, чем у Беты. Сравните высоты этих параллелепипедов.

120. Для перевозки груза автомашине грузоподъёмностью 7,5 тонн пришлось сделать 12 рейсов. Сколько рейсов понадобится сделать автомашине грузоподъёмностью 9 тонн для перевозки этого же груза?

121. Работник издательства Джамал подсчитала, что если она будет вычитывать по 42 страницы новой книги в час, то вся работа займёт 8 часов. Сколько времени потребуется на эту работу, если Джамал сможет вычитывать на 6 страниц в час больше?

122. Наталья купила на базаре лук и морковь. При этом она истратила на покупки одну и ту же сумму денег. Зная, что моркови куплено больше, сравните их цены.

4.12. Проценты

Возможно, наиболее часто пропорции используются при работе с процентами. Основным элементом соответствующих рассуждений является то, что базовое число отождествляют со 100 процентами.

Другими словами, один процент – это сотая часть от базового числа. Например, один процент от числа 200 равен или, как часто говорят, составляет число $\frac{200}{100} = 2$; пять процентов от этого же числа 200 составляют число (или соответствуют числу) $\frac{200}{100} \cdot 5 = 10$ и т. д.

Задача

a) Бегайым разрешили работать на 20% времени меньше. Сколько теперь длится её рабочий день, если раньше он равнялся 8 часам 12 минутам?

b) Зарплату Сабины увеличили на 15%. Чему она теперь равна, если раньше была 15200 сомов?

c) Отвечая на вопрос «Кто ваша самая любимая учительница?», 28 учеников назвали Джаркын эже. Если они составляют 80%, то сколько всего учеников в этом классе?

d) На последней контрольной работе 12 учеников получили четвёрки. Зная, что четвёрки получили 40% учеников, определите, сколько учеников получили тройки, если они составляют 30%?

Решение

a) Решим эту задачу двумя способами.

Так как 20% = 0,20, а 12 минут равны 0,2 часа, Бегайым может работать на $0{,}20 \cdot 8{,}2 = 1{,}64$ часа меньше. Следовательно, теперь её рабочий день длится $8{,}2 - 1{,}64 = 6{,}56$ часа.

Эти действия можно записать и по-другому:

$8{,}2 - 0{,}20 \cdot 8{,}2 = 8{,}2\,(1 - 0{,}2) = 8{,}2 \cdot 0{,}8 = 6{,}56$ часа.

Другой способ. Исходное, базовое время возьмём за 100%. Тогда новое время составит 100% − 20% = 80%.

Составим пропорцию: $8{,}2 : 100 = t : 80$, где t – искомое время. Тогда, согласно основному свойству пропорции:

$100t = 8{,}2 \cdot 80$; $100\,t = 656$; $t = 6{,}56$.

b) Поступим, как в предыдущем случае. Зарплата Сабины увеличилась на $0{,}15 \cdot 15200 = 2280$ сомов.

Следовательно, теперь её зарплата $15200 + 2280 = 17480$ сомов.

Запишем это по-другому:

$15200 + 0{,}15 \cdot 15200 = 15200\,(1 + 0{,}15) = 15200 \cdot 1{,}15 = 17480$ сомов.

Другой способ. Исходную зарплату возьмём за 100%. Тогда новая зарплата составит 100% + 15% = 115%.

Составим пропорцию: $15200 : 100 = w : 115$, где w – искомая новая зарплата. Тогда, согласно основному свойству пропорции:

$100w = 15200 \cdot 115$; $100\,w = 1748000$; $w = 17480$.

c) Начнём сразу с составления пропорции. Если 28 учеников составляют 80%, то N – общее количество учеников в этом классе – равно 100%. Итак, $28 : 80 = N : 100$.

Тогда $80N = 28 \cdot 100$; $80N = 2800$; $N = 35$.

Проверим результат: если в классе 35 учеников, то 80% от этого числа равны: $0{,}8 \cdot 35 = 28$.

d) Обозначив через s количество учеников, получивших «тройки», получим пропорцию $12 : 40 = s : 30$.

Тогда: $40s = 12 \cdot 30$; $40s = 360$; $s = 9$.

123. **1)** Цена яблок уменьшилась на 12%. Сколько теперь стоит килограмм яблок, если раньше цена была равна 45 сомам?

2) На выполнение домашнего задания по литературе Кристина затратила на 130% времени больше, чем на математику. Сколько часов ушло на литературу, если на математику потрачены 1 час и 15 минут?

3) В том, что им нравятся девочки с бантиками, признались 8 мальчиков-шестиклассников. Если они составляют 16%, то сколько всего мальчиков в шестых классах этой школы?

4) В деревне Кум-Добо козы имеются в 36 дворах, что составляет 24% дворов. Сколько дворов имеют яков, если они имеются в 30% дворов?

124. **1)** Цена персиков повысилась на 18%. Сколько теперь стоит килограмм персиков, если раньше цена была равна 50 сомам?

2) На выполнение домашнего задания Керим затратил на 35% времени меньше, чем Уулжан. Сколько часов затратил Керим, если Уулжан потратила 2 часа 36 минут?

3) В том, что им нравятся мальчики, которые хорошо учатся, признались 34 девочки-шестиклассницы. Если они составляют 85%, то сколько всего девочек в шестых классах этой школы?

4) В деревне Сары-Булак капусту сажают на 63 огородах, что составляет 72% огородов. На скольких огородах выращивают помидоры, если они растут на 80% огородов?

125. Сочините две задачи, подобные задачам, рассмотренным в данном параграфе.

1. Обжора может съесть 32 пирожка за сутки. Сколько пирожков он может съесть за: a) 18 часов; b) 2,5 суток; c) 3 суток 15 часов?

2. Махабат лепила манты 2 часа 24 минуты. Сколько мант она слепила, если производительность её труда: a) 3 манты / мин; b) 165 мант / час?

3. Калыбек подсчитал, что увеличение производительности труда позволит увеличить выпуск продукции на: a) 18%; b) 106%; c) 0,6%. Сколько продукции будет выпущено в этом случае, если в текущий момент выпускается 3500 единиц товара?

4. Толкунбек считает, что использование современной техники позволит уменьшить затраты на выпуск продукции на: a) 0,8%; b) 16%. Какими будут затраты в этом случае, если в текущий момент они равны 37 500 сомов?

5. Проверьте, составляют ли пропорцию отношения:

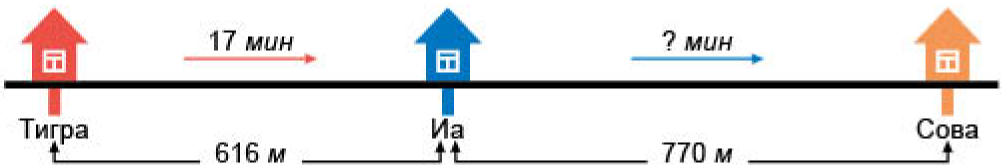
a) 16,4 : 4,1 и 7,28 : 1,82; c) 1,83 : 0,17 и 10,98 : 1,02;
b) 6,15 : 1,11 и 2,05 : 0,37; d) 71 : 0,4 и 14,2 : 0,8.

6. Решите уравнения:

a) $\frac{2}{5} = \frac{4}{1-3x}$; c) $\frac{8}{3+x} = \frac{9}{3-2x}$;

b) $\frac{3}{0,5} = \frac{12x-18}{1-6x}$; d) $\frac{2-3x}{11} = \frac{17+5x}{2}$.

7. Расстояние от домика Тигры до домика Иа 616 метров. Винни-Пух проходит это расстояние за 17 *мин*. За сколько времени он пройдёт 770 метров от домика Иа до домика Совы, двигаясь с такой же скоростью?



8. Парикмахерская за 3,5 часа обслуживает 47 клиентов. Сколько клиентов будет обслужено: a) за 1 час 24 минуты; b) за 4 часа 54 минуты?

9. Калыс прочитал 88 страниц книги за 1 час 15 минут. Продолжая читать с той же скоростью, сколько страниц он прочитает за: a) 3 часа; b) 1,26 часа; c) 2 часа 18 минут?

10. Ребро куба равно 4,2 *м*. Определите его объём, площадь полной поверхности, длину каркаса.

Определите объём, площадь полной поверхности, длину каркаса куба с ребром: a) меньшим в 6 раз; b) большим в 2,5 раза; c) большим в 4 раза.

Укажите, между какими величинами имеет место прямо пропорциональная зависимость и, если она есть, напишите соответствующую формулу.

11. Цена груш уменьшилась на 14%. Сколько сомов сэкономила Салкын, купившая 2,5 *кг*, если раньше цена была равна 65 сомам?

12. На выполнение домашнего задания Назира затратила на 105% времени больше, чем Джолдош. Сколько часов затратила Назира, если Джолдош потратил 2 часа 24 минуты?

13. В том, что им нравятся мультики, признались 18 мальчиков-шестиклассников. Если они составляют 30%, то сколько всего мальчиков в шестых классах этой школы?

14. Занятия танцевального кружка посещают 15 шестиклассников, что составляет 25% от их общего числа. Сколько шестиклассников занимается в хоровом кружке, если их число составляет 20% от общего числа шестиклассников?

15. Обжора может съесть 40 пирожков. Сколько пирожков в час он будет съедать, если съест все за a) 10 часов; b) 8 часов; c) 5 часов; d) 6 часов 24 минуты? Какого рода зависимость имеет место между количеством пирожков в час и временем?

16. Елена печатает со скоростью 8 страниц в час. Сколько страниц она напечатает за
a) 3 часа; b) 6 часов; c) 4,25 часов; d) 5 часов 45 минуты? Какого рода зависимость имеет место между общим количеством напечатанных страниц и временем?

17. Виктор должен напечатать 80 страниц текста. Сколько страниц в час он должен печатать, для того чтобы выполнить работу за
a) 5 часов; b) 16 часов; c) 12,5 часов; d) 3 часа 24 минуты? Какого рода зависимость имеет место между количеством напечатанных в час страниц и временем?

§ 5. Смеси

5.1. Определение количества коз

Задача

На лугу пасутся 17 овец и 12 гусей. После того как к ним присоединились несколько коз, Гульзина насчитала 128 ног. Сколько коз появилось на лугу?

Решение

Обозначив через x количество коз, получим уравнение:
$4x + 4 \cdot 17 + 2 \cdot 12 = 128$,
4 и 2 – это количество ног у коз, овец и гусей, соответственно.
Приведём подобные члены: $4x = 12 - 68 - 24$; $4x = 36$.
Отсюда получается, что $x = 36 : 4 = 9$.
Итак, мы выяснили, что к овцам и гусям присоединились 9 коз.

126. На лугу паслись 28 овец и 27 гусей. После того как с луга ушло несколько овец, Сайкал насчитала 128 ног. Сколько овец ушло с луга?

127. На лугу пасутся 37 овец. После того как к ним присоединились несколько гусей, Бурул насчитала 180 ног. Сколько гусей появилось на лугу?

5.2. Определение цены картофеля

Задача

Темирлан купил 3,5 *кг* картофеля и 2 *кг* лука, заплатив 107 сомов. Сколько стоил картофель, если цена лука была 22 *сом. / кг*?

Решение

Обозначив через p цену картофеля, получим, что $3{,}5p + 2 \cdot 22 = 107$.
Приведём подобные члены: $3{,}5p = 107 - 44$; $3{,}5p = 63$ и получим
$p = 63 : 3{,}5 = 18$.
Следовательно, картофель был куплен по цене 18 *сом. / кг.*

128. Айдана купила 5 *кг* муки и 2,4 *кг* риса, заплатив 380 сомов. Сколько стоил рис, если цена муки была 42,4 *сом. / кг*?

129. Азиз купил 5 пар носков и 4 футболки, заплатив 1021 сом. Сколько стоила пара носков, если цена футболки была 214 сомов?

5.3. Определение цены карамели

Задача

В магазине к 14 килограммам карамели добавили 20 килограммов шоколадных конфет и получили смесь стоимостью 750 сомов. Сколько стоил килограмм карамели, если цена шоколадных конфет: a) 960 сомов; b) 1400 сомов?

Решение

a) Обозначив через p цену карамели, получим:
$14p + 20 \cdot 960 = 750(14 + 20)$.

Произведём необходимые действия: $14p + 19\,200 = 25\,500$, приведём подобные члены: $14p = 6300$. Отсюда следует: $p = 450$.

Итак, цена карамели 450 сомов.

b) Поменяв число 9,6 на 14, получим: $14p + 20 \cdot 1400 = 750(14 + 20)$.

Тогда, $14p + 28\,000 = 25\,500$, приведём подобные члены: $14p = -2500$. Отсюда получаем, что такое невозможно, потому что цена карамели не может быть отрицательным числом.

130. В магазине к 12 *кг* карамели добавили 16 *кг* шоколадных конфет и 5 *кг* ирисок. В итоге получилась смесь стоимостью 1000 сомов. Сколько стоил килограмм ирисок, если цена шоколадных конфет 1520 сомов, а карамели: a) 360 сомов; b) 800 сомов?

131. В магазине к 22 *кг* карамели добавили 15 *кг* ирисок. В итоге получилась смесь стоимостью 700 сомов. Сколько стоил килограмм ирисок, если цена карамели: a) 430 сомов; b) 355 сомов?

5.4. Определение необходимого количества семян

Задача

Сколько килограммов семян травы A стоимостью 50 *сом./кг* нужно смешать с 15 *кг* семян травы B стоимостью 90 *сом./кг*, чтобы получить смесь стоимостью 80 *сом./кг*?

Решение

Обозначим количество килограммов семян травы A через a. Тогда имеем уравнение $50a + 90 \cdot 15 = 80(a + 15)$.

Раскроем скобки: $50a + 1350 = 80a + 1200$, затем приведём подобные члены: $-30a = -150$. Отсюда получим, что $a = 5$. Итак, нужно взять 5 *кг* семян травы A.

132. Сколько килограммов риса стоимостью 75 *сом./кг* нужно смешать с 21 килограммом риса стоимостью 96 *сом./кг*, чтобы получить смесь стоимостью 87,6 *сом./кг*?

133. Сколько килограммов печенья стоимостью 60 *сом. / кг* нужно смешать с 25 *кг* печенья стоимостью 92 *сом. / кг*, чтобы получить смесь стоимостью 85 *сом. / кг*?

5.5. Определение количества монет в копилке

Задача

Абакир собирает десяти- и трёхсомовые монеты. После того как он положил в копилку 33-ю десятисомовую монету, в ней оказалось 381 сом. Сколько трёхсомовых монет в копилке у Абакира?

Решение

Обозначив через x количество трёхсомовых монет, получим уравнение: $3x + 33 \cdot 10 = 381$.

Приведём подобные члены: $3x = 381 - 330$; $3x = 51$.

Отсюда получается, что $x = 51 : 3 = 17$.

Итак, мы выяснили, что в копилке у Абакира семнадцать трёхсомовых монет.

134. У Надиры 18 монет достоинством в пять центов и a монет достоинством в пятьдесят центов. Чему равно число a, если у Надиры всего 6 долларов 40 центов?

135. Акмурад имеет 13 монет достоинством в три сома и b монет достоинством в пять сомов. Чему равно число b, если у Акмурада всего 124 сома?

5.6. Определение необходимого объёма раствора соли

Задача

Сколько литров 80% раствора соли нужно добавить к 14 литрам 30% раствора, для того чтобы получить 45% раствор?

Решение

Выражение 30% раствор соли означает, что в воде растворена соль таким образом, что 30% полученной жидкости составляет соль. Таким образом, в 14 литрах раствора будет $0{,}30 \cdot 14$ соли. Тогда, если объём 80% раствора обозначить x, то соли в нём будет $0{,}80x$. Тогда имеет место уравнение: $0{,}30 \cdot 14 + 0{,}80x = 0{,}45(14 + x)$.

Здесь $14 + x$ – объём полученного раствора, а $0{,}45(14 + x)$ – количество соли в полученном растворе.

В уравнении раскроем скобки:

$4{,}2 + 0{,}8x = 6{,}3 + 0{,}45x$, приведём подобные члены: $0{,}35x = 2{,}1$.

Отсюда следует: $x = 2{,}1 : 0{,}35 = 6$.

Итак, если к 14 литрам 30% раствора соли добавить 6 литров 80%, то получится 20 литров раствора, в котором соль занимает 45%.

136. Сколько литров 22% раствора соли нужно добавить к 25 литрам 10% раствора, чтобы получить 14% раствор?

137. Сколько литров 42% раствора соли нужно добавить к 12 литрам 17,1% раствора, чтобы получить 24% раствор?

5.7. Определение необходимого объёма воды

Задача

Сколько чистой воды нужно смешать с 3,5 литра 60% раствора соли, чтобы получить 21% раствор?

Решение

Обозначим через a количество литров необходимой воды. Тогда объём полученного раствора равен $3{,}5 + a$, и имеет место уравнение:

$0{,}60 \cdot 3{,}5 + 0 \cdot a = 0{,}21\,(3{,}5 + a)$.

Раскроем скобки: $2{,}1 = 0{,}735 + 0{,}21a$, приведём подобные члены:

$0{,}21a = 1{,}365$. Отсюда следует: $a = 1{,}365 : 0{,}21 = 6{,}5$.

Итак, если 3,5 литра 60% раствора соли смешать с 6,5 литра чистой воды, то получится 10 литров раствора, в котором соль занимает 21%.

138. Сколько чистой воды нужно смешать с 13 литрами 36% раствора соли, чтобы получить 11,7% раствор?

139. Сколько чистой воды нужно смешать с 52 литрами 45% раствора соли, чтобы получить 32,5% раствор?

5.8. Определение необходимого объёма масла

Задача

Для заправки снегохода используется смесь, содержащая 5% машинного масла и 95% бензина. Сколько масла нужно добавить в 38 литров смеси, содержащей 2% машинного масла и 98% бензина, чтобы получить нужную концентрацию?

Решение

Обозначим через m необходимое количество литров масла. Тогда объём полученной смеси равен $38 + m$, и имеет место уравнение:

$0,02 \cdot 38 + m = 0,05(38 + m)$.

Здесь $0,02 \cdot 38$ – количество масла в исходной смеси,

$0,05(38 + m)$ – количество масла в полученной смеси. Раскроем скобки в уравнении: $0,76 + m = 1,9 + 0,05m$, приведём подобные члены:

$0,95m = 1,14$. Отсюда следует: $m = 1,14 : 0,95 = 1,2$.

Итак, если к 38 литрам исходной смеси добавить 1,2 литра машинного масла, то получится необходимая смесь.

140. В шестых классах школы № 2 было 75 учеников, 4% из них – двоечники. После того как в эту школу перевели несколько двоечников из соседних школ, процент двоечников увеличился до 10%. Сколько новых двоечников пришло в школу № 2?

141. Для заправки нового двигателя требуется смесь, содержащая 1% машинного масла и 99% бензина. Сколько бензина нужно добавить в 30 литров смеси, содержащей 6% машинного масла и 94% бензина, чтобы получить нужную концентрацию?

5.9. Определение объёма раствора низкой концентрации

Задача

В баке было 20 литров 15% раствора соли. Когда x литров этого раствора заменили равным количеством 95% раствора, получился 40% раствор. Чему равен x?

Решение

Количество соли в полученном растворе равно $0,40 \cdot 20$.

Оно получено из исходного раствора: $0,15(20 - x)$ и добавленного раствора: $0,95x$. Следовательно, имеет место уравнение:

$0,15(20 - x) + 0,95x = 0,40 \cdot 20$.

Раскроем скобки: $3 - 0,15x + 0,95x = 8$, приведём подобные члены:

$0,8x = 5$. Отсюда следует: $x = 5 : 0,8 = 6,25$.

Мы выяснили, что были заменены 6,25 литра исходного раствора.

142. В 250-граммовой кружке чая у Кати был 10% раствор сахара. Когда Катя ненадолго вышла, Ира отпила из кружки, а затем добавила чай без сахара. В результате получилось то же количество чая с 6% раствором сахара. Сколько граммов сладкого чая отпила Ира?

143. В баке было 8 литров 34% раствора соли. Когда m литров этого раствора заменили равным количеством 60% раствора, получился 43,75% раствор. Чему равно m?

5.10. Добавление монет в копилку

Задача

В копилке у Ислама имеются 13 монет достоинством в три сома, 18 монет достоинством в пять сомов и 4 монеты достоинством в десять сомов. После того как он добавил несколько таких же монет, в копилке оказалось: a) 180 сомов; b) 184 сома. Какие монеты были добавлены?

Решение

В копилке было $13 \cdot 3 + 18 \cdot 5 + 4 \cdot 10 = 169$ сомов.

a) Значит, было добавлено $180 - 169 = 11$ сомов. Нетрудно понять, что 11 сомов могут быть только суммой двух монет по 3 сома и одной монеты достоинством 5 сомов. Мы рассматриваем только трёх-, пяти- и десятисомовые монеты.

b) Добавлено $184 - 169 = 15$ сомов. В этом случае задача имеет три разных решения. Были добавлены или пять монет по 3 сома, или три монеты по 5 сомов, или одна монета 10 сомов и одна монета 5 сомов.

144. В копилке у Мээрим имеются 11 монет достоинством в три сома, 7 монет достоинством в пять сомов и 12 монет достоинством в пятьдесят тыйынов. После того как она добавила несколько таких же монет, в копилке оказалось: a) 76 сомов; b) 80 сомов.
Какие монеты были добавлены?

145. В копилке у Таалая имеются 29 монет достоинством в три сома, 14 монет достоинством в пять сомов и 16 монет достоинством в один сом. После того как он добавил несколько таких же монет, в копилке оказалось: a) 177 сомов; b) 178 сомов.
Какие монеты были добавлены?

5.11. Введение в линейные уравнения с двумя неизвестными

Улан и Динара принесли с базара 4 килограмма моркови и 2 килограмма лука. Дома их встретила дочь Бермет, и состоялся следующий разговор:

– Интересно, сколько сегодня стоят морковь и лук? – спросила Бермет.

– За всё мы заплатили 112 сомов, – ответил Улан.

– Понятно, морковь стоит 23 сома, а лук – 10 сомов, потому что $23 \cdot 4 + 10 \cdot 2 = 92 + 20 = 112$, – сказала Бермет через несколько минут.

– Нет, цены были другими, – возразил Улан.

– Наверное, морковь стоит 25 сомов, лук – 6 сомов, или морковь стоит 10 сомов, а лук – 36 сомов, – сказала Бермет, подумав ещё несколько минут.

– Нет, и это неправильно, – сказал Улан.

Бермет обиделась и обратилась к маме:

– Может, ты скажешь мне, сколько сегодня стоят морковь и лук? – спросила она.

– Морковь стоит на 4 сома дороже, – ответила Динара.

– Мама, ты могла бы этого не говорить! Ведь можно найти сколько угодно пар чисел, разница между которыми равна 4. Например, 5 и 1; 7 и 3; 51 и 47; 6,7 и 2,7... – возразила Бермет обиженно.

– Доча, ты зря обижаешься. Если ты спокойно подумаешь и объединишь информацию, полученную от меня, с тем, что ты узнала от папы, то узнаешь цену моркови и цену лука, – возразила Динара.

Бермет задумалась.

Давайте подумаем и мы.

Как и во многих других случаях, эту проблему удобно решать с помощью математики. Для этого введём необходимые обозначения и переведём проблему на язык математики.

Пусть m – цена моркови, l – цена лука. Тогда из слов Улана следует, что

$$4m + 2l = 112. \qquad (1)$$

В уравнении (1) слагаемое $4m$ показывает, сколько всего было заплачено за морковь, слагаемое $2l$ – сколько заплатили за лук.

Такие уравнения, то есть уравнения вида $ax + by = c$, где a, b, c – заданные числа – коэффициенты уравнения, называются **линейными уравнениями с двумя неизвестными**.

Как уже обнаружила Бермет, линейные уравнения с двумя неизвестными имеют много решений.

Информацию, полученную от Динары, также можно записать в виде линейного уравнения с двумя неизвестными:

$$m - l = 4, \qquad (2)$$

которое также имеет много решений.

В то же время числа m и l, которые выражают цену моркови и цену лука, должны быть решением как уравнения (1), так и уравнения (2). В математике это записывают следующим образом: записываем одно уравнение под другим и соединяем их фигурной скобкой:

$$\begin{cases} 4m + 2l = 112 \\ m - l = 4 \end{cases}$$

Полученное выражение называется **системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными**.

О том, как решаются такие системы, мы будем говорить в следующем параграфе.

Задача

Кошой и Диля решили купить два вида конфет: первый – по 200 сомов за килограмм, второй – по 260 сомов. Сколько килограммов конфет каждого вида можно купить, если на покупку они решили израсходовать 800 сомов?

Решение

Обозначив через x вес конфет первого вида, через y – вес конфет второго вида, получим, что $200x + 260y = 800$. Получилось линейное уравнение с двумя неизвестными, которое, как уже было сказано, имеет много решений. Поэтому давайте получим несколько решений. Для этого будем придавать переменной y конкретные значения и решать получающиеся уравнения.

Итак, если $y = 1$, то $200x + 260 \cdot 1 = 800$.

Тогда $200x = 800 - 260$, и $x = 2{,}7$.

Мы выяснили, что если Кошой и Диля решат купить 1 *кг* конфет второго вида, то они смогут купить еще 2,7 *кг* конфет первого вида.

Также, если $y = 2$, то $200x + 260 \cdot 2 = 800$.

Тогда $200x = 800 - 520$, и $x = 1{,}4$;

если $y = 2{,}5$, то $200x + 260 \cdot 2{,}5 = 800$.

Тогда: $200x = 800 - 650$, и $x = 0{,}75$.

В то же время, если $y = 4$, то $200x + 260 \cdot 4 = 800$.

Тогда $200x = 800 - 1040$, и $x = -1{,}2$.

В этом случае получилось, что они могут купить 4 *кг* конфет второго вида и отрицательное количество конфет первого вида. Понятно, что такого быть не может и это решение не может быть принято в качестве решения задачи.

Стоит заметить, что решения задачи можно получать, придавая конкретные значения переменной x. Но в этом случае мы усложним себе жизнь, потому что делить на 200 намного проще, чем делить на 260.

146. Манана купила два вида чулок на 18 лари. Пара чулок первого вида стоит 1 лари, второй – 1,5 лари (лари – грузинские деньги).

1) Сколько пар чулок каждого вида было куплено? Покажите 3 варианта решения.

2) Сколько пар чулок первого вида купила Манана, если она купила а) 8 пар; b) 14 пар; c) 5 пар чулок второго вида?

147. Угур купил два вида печенья на 8 лир. Килограмм печенья первого вида стоит 2,5 лиры, второго – 1,7 лиры (лиры – турецкие деньги).

1) Сколько *кг* печенья каждого вида было куплено? Покажите 3 варианта решения.

2) Сколько *кг* печенья первого вида купил Угур, если он купил а) 2 *кг*; b) 5 *кг* печенья второго вида?

148. Сочините две задачи, подобные задачам, рассмотренным в данном параграфе.

1. На лугу паслись 38 овец и 17 гусей. После того как с луга ушло несколько овец, Канат насчитал 126 ног. Сколько овец ушло с луга?

2. На лугу пасутся 37 гусей. После того как к ним присоединились несколько овец, Эрнист насчитал 176 ног. Сколько овец появилось на лугу?

3. Бексултан изготовил 17 трёхногих и 13 четырёхногих столов. После того как он изготовил ещё N трёхногих столов, количество использованных ножек оказалось равным 124. Чему равно N?

4. На стоянке стояли 37 автомобилей и 22 двухколёсных велосипеда. После того как оттуда выехало несколько автомобилей, Эльчибай подсчитал, что на стоянке стоят 188 колёс. Сколько автомобилей выехало со стоянки?

5. Эльмира купила 3,5 *кг* муки и a *кг* риса, заплатив 300,4 сома. Чему равно a, если цена риса – 83 *сом./кг*, цена муки – 38,4 *сом./кг*?

6. Темир купил 4 пары носков и b штук футболок, заплатив 755 сомов. Чему равно b, если цена пары носков – 35 сомов, цена футболки – 246 сомов?

7. Сколько литров 20% раствора соли нужно добавить к 15 литрам 30% раствора, чтобы получить 34% раствор?

8. За неделю Незнайка получил 2 пятёрки, 7 двоек и несколько троек. Сколько троек получил Незнайка, если известно, что сумма всех его оценок равна 39?

9. По контракту работникам причитается 8 евро за каждый отработанный день, а за каждый пропущенный день с них вычитается 2 евро. После шестого отработанного дня выяснилось, что работникам ничего не причитается. Сколько дней прошло до этого момента с начала действия контракта?

10. В магазине к 21,5 *кг* карамели добавили 6 *кг* шоколадных конфет и 15 *кг* ирисок. В итоге получилась смесь стоимостью 820 сомов. Сколько стоил килограмм ирисок, если цена шоколадных конфет 1500 сомов, а карамели: a) 700 сомов; b) 550 сомов?

11. В копилке у Акрама имеются 37 монет достоинством в три сома и 8 монет достоинством в пять сомов. После того как он добавил несколько монет одинакового достоинства, в копилке оказалось: a) 160 сомов; b) 166 сомов. Какие монеты были добавлены? Сколько монет было добавлено?

12. Сколько литров 28% раствора соли нужно добавить к 21 литру 7% раствора, чтобы получить 15,75% раствор?

13. После того как смешали 15 литров 38% раствора соли, 31 литр 70% раствора соли и x литров 45% раствора соли, получился 58,4% раствор. Чему равен x?

14. После того как смешали 14 литров 35% раствора соли, 19 литров 50% раствора соли и y литров 40% раствора соли, получился 43% раствор. Чему равен y?

15. Сколько чистой воды нужно смешать с 14 литрами 65% раствора соли, чтобы получить 26% раствор?

16. В шестых классах школы № 3 было 64 ученика, 6,25% из них – ударники. После того как в эту школу перешло несколько ударников из соседних школ, процент ударников увеличился до 25%. Сколько новых ударников пришло в школу № 3?

17. В баке было 15 литров 25% раствора соли. Когда h литров этого раствора заменили равным количеством 40% раствора, получился 28% раствор. Чему равно h?

18. Джемаль купил два вида сладостей на 18 лир. Килограмм сладостей первого вида стоит 1,5 лиры, второго вида – 2,4 лиры.

1) Сколько *кг* сладостей каждого вида было куплено? Покажите 3 варианта решения.
2) Сколько *кг* сладостей второго вида купил Джемаль, если он купил a) 2 *кг*; b) 5,2 *кг* сладостей первого вида?

§ 6. Простейшие системы линейных уравнений

6.1. Введение в системы линейных уравнений

В конце прошлого параграфа мы рассмотрели некую ситуацию.

Задача

Улан и Динара принесли с базара 4 килограмма моркови и 2 *кг* лука. Дома их встретила дочь Бермет и узнала, что истрачено 112 сомов, а морковь стоит на 4 сома дороже лука. Исходя из этой информации, Бермет должна узнать цену моркови и цену лука.

Давайте поможем ей.

Решение

Чтобы разобраться в этой ситуации, как и во многих других случаях, удобно перейти на язык математики.

Пусть m – цена моркови, l – цена лука. Тогда

$$4m + 2l = 112. \qquad (1)$$

В уравнении (1) слагаемое $4m$ показывает, сколько всего было заплачено за морковь, слагаемое $2l$ – сколько за лук.

Информацию о разности цен также можно записать в виде линейного уравнения с двумя неизвестными:

$$m - l = 4. \qquad (2)$$

Числа m и l, которые выражают цену моркови и цену лука, должны быть решением как уравнения (1), так и уравнения (2). В математике это записывают следующим образом: записываем одно уравнение под другим и соединяем их фигурной скобкой:

$$\begin{cases} 4m + 2l = 112 \\ m - l = 4 \end{cases}$$

Полученное выражение называется **системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными**.

Для того чтобы решить систему, решим второе уравнение относительно неизвестной m (математики говорят: выразим m из второго уравнения): $m = 4 + l$, и подставим найденное выражение в первое уравнение системы:

$$\begin{cases} 4m + 2l = 112 \\ m - l = 4 \end{cases}; \qquad \begin{cases} 4m + 2l = 112 \\ m = 4 + l \end{cases}; \qquad \begin{cases} 4(4 + l) + 2l = 112 \\ m = 4 + l \end{cases}$$

Раскроем скобки в первом уравнении:

$4(4 + l) + 2l = 112$; $16 + 4l + 2l = 112$, приведём подобные члены:

$4l + 2l = 112 - 16$; $6l = 96$ – и получим, что $l = 16$.

Далее, воспользовавшись тем, что $m = 4 + l$, найдём, что $m = 4 + 16 = 20$.

Проделав эти вычисления, Бермет выяснила, что лук стоит 16 сомов, а морковь – 20 сомов, и услышала похвалу от родителей, подтвердивших правильность её решения.

В завершение отметим, что метод, которым была решена система, называется **методом подстановки**.

149. Малаке купил по одному килограмму печенья двух видов. Определите цену печенья каждого вида, если известно, что на покупку израсходовано 108 лир; печенье второго вида дороже на 17 лир.

150. Алмамбет купил по одному килограмму конфет двух видов. Определите цену конфет каждого вида, если известно, что на покупку израсходовано 820 сомов; конфеты первого вида дороже на 70 сомов.

6.2. Системы на разность значений неизвестных

Задача

«Тигры» выиграли у «Львов» в баскетбол 23 очка. После игры тренер «Львов» сказал, что если бы они набрали в два раза больше очков, то выиграли бы 19 очков. С каким счётом закончилась игра?

Решение

Обозначив через t количество очков, которое набрали «Тигры», через l – «Львы», получим, что $t - l = 23$. Слова тренера «Львов» задают уравнение $2l - t = 19$.

Эти уравнения составляют систему:

$$\begin{cases} t - l = 23 \\ 2l - t = 19 \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выразим t: $t = 23 + l$ и, подставив во второе уравнение системы, получим: $2l - (23 + l) = 19$.

Раскроем скобки: $2l - 23 - l = 19$, приведём подобные члены: $l - 23 = 19$ и получим $l = 42$.

Тогда $t = 23 + l = 23 + 42 = 65$.

Итак, в этой игре «Тигры» победили «Львов» со счётом 65 : 42.

151. В матче по шахматам «Совы» выиграли у «Змеев» с преимуществом в 2 очка. После игры один из болельщиков сказал, что если бы у «Змеев» было в три раза больше очков, то они бы выиграли с преимуществом в 5 очков. С каким счётом закончилась игра?

152. В матче по гандболу «Соколы» выиграли у «Орлов» 7 мячей. После игры один из болельщиков сказал, что если бы «Соколы» забили в два раза больше мячей, то они бы выиграли с преимуществом в 22 мяча. С каким счётом закончилась игра?

6.3. Системы на сумму значений неизвестных

Задача

Магазин имеет два вида конфет: первый – по 200 сомов за килограмм, второй – по 120 сомов. Сколько килограммов конфет каждого вида было продано, если за 90 *кг* конфет получено 14 000 сомов?

Решение

Обозначив через x вес конфет первого вида, через y – вес конфет второго вида, получим, что $x + y = 90$. Тогда за конфеты первого вида получено $200x$ сомов, за конфеты второго вида – $120y$ сомов.

В итоге получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 90 \\ 200x + 120y = 14000 \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выразим y: $y = 90 - x$ и, подставив во второе уравнение системы, получим: $200x + 120(90 - x) = 14\,000$.

Раскроем скобки: $200x + 10\,800 - 120x = 14\,000$, приведём подобные члены: $80x = 3200$. Отсюда следует: $x = 40$.

Итак, конфет первого вида продано 40 килограммов, а конфет второго вида: $y = 90 - x = 90 - 40 = 50$ килограммов.

153. Магазин торгует двумя видами кепок. Первый продаётся по 120 сомов, второй – по 70 сомов. Сколько кепок каждого вида было продано, если за 19 кепок получено 1880 сомов?

154. На двух полях посеяли пшеницу. На первом поле было собрано по 40 центнеров с гектара, на втором – по 37 центнеров с гектара. Определите площадь каждого поля, зная, что всего было засеяно 180 гектаров и с них собрано 7140 центнеров пшеницы.

6.4. Задача на разрезание

Задача

Было 6 кусков торта. Некоторые из этих кусков разрезали на четыре части, оставшиеся – на две. В итоге получилось 22 кусочка. Сколько кусков было разрезано на 2 части?

Решение

Обозначим количество разрезанных на четыре части кусков торта через x, количество разрезанных на две части – через y. Тогда вместо x кусков появится $4x$ кусков, вместо y кусков появится $2y$ кусков. В итоге имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 4x + 2y = 22 \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выразим y: $y = 6 - x$ и, подставив во второе уравнение системы, получим: $4x + 2(6 - x) = 22$.

Раскроем скобки: $4x + 12 - 2x = 22$, затем приведём подобные члены: $2x = 10$. Отсюда следует: $x = 5$.

Итак, на 4 части были разрезаны 5 кусков, а на 2 части:
$y = 6 - x = 6 - 5 = 1$ кусок.

155. Было 6 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на четыре части. В итоге количество листов достигло 12. Сколько листов не было разрезано?

156. Было 7 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на четыре части, оставшиеся – на шесть. В итоге количество листов достигло 32. Сколько листов было разрезано на 6 частей?

6.5. Система уравнений, связанная с суммой

Задача

У щенят и утят вместе 48 ног и 18 голов. Сколько щенят и сколько утят?

Решение

Обозначим количество щенят через x, количество утят – через y. Тогда количество ног у щенят равно $4x$, количество ног у утят равно $2y$. В итоге получится система уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 18 \\ 4x + 2y = 48 \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выразим y: $y = 18 - x$ и, подставив во второе уравнение системы, получим: $4x + 2(18 - x) = 48$.

Раскроем скобки: $4x + 36 - 2x = 48$, приведём подобные члены:
$2x = 12$. Отсюда получим, что $x = 6$.

Следовательно, имеется 6 щенят и $y = 18 - x = 18 - 6 = 12$ утят.

157. На стоянке на 120 колёсах стоят автомобили и двухколёсные велосипеды. Сколько автомобилей и сколько велосипедов на стоянке, если их всего 33?

158. Известно, что Асан изготовил 15 столов. Определите, сколько из них было трёхногих, сколько – четырёхногих, зная, что было использовано 54 ножки?

6.6. Баллы за тест

Задача

На контрольной работе предложено 30 вопросов. За каждый правильный ответ дается 2 балла, за каждый неправильный – снимается полбалла. Магомед ответил на все вопросы и получил 28 баллов. Сколько неправильных ответов дал Магомед?

Решение

Обозначим через x количество правильных ответов, через y – количество неправильных. Тогда за правильные ответы получено $2x$ баллов, за неправильные ответы снято $0{,}5y$ баллов.

В итоге имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 2x - 0{,}5y = 28 \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выразим x: $x = 30 - y$ и подставим во второе уравнение системы: $2(30 - y) - 0{,}5y = 28$.

Раскроем скобки: $60 - 2y - 0{,}5y = 28$, приведём подобные члены: $-2{,}5y = -32$. Отсюда следует: $y = (-32) : (-2{,}5) = 12{,}8$.

Итак, $y = 12{,}8$, тогда $x = 30 - 12{,}8 = 17{,}2$.

Мы решили систему, но это решение не может быть ответом к задаче: число вопросов должно быть целым числом.

159. На контрольной работе предложено 25 вопросов. За каждый правильный ответ даётся 1 балл, за каждый неправильный снимается четверть балла. Манучар ответил на все вопросы и получил 15 баллов. Сколько неправильных ответов дал Манучар?

160. На контрольной работе предложено 28 вопросов. За каждый правильный ответ даётся 7 баллов, за каждый неправильный снимается 2 балла. Марина ответила на все вопросы и получила 17 баллов. Сколько правильных ответов дала Марина?

161. На контрольной работе предложено 18 вопросов. За каждый правильный ответ даётся 2 балла, за каждый неправильный снимается полбалла. Мадина ответила на все вопросы и получила 18 баллов. Сколько неправильных ответов дала Мадина?

162. На контрольной работе предложено 20 вопросов. За каждый правильный ответ даётся 4 балла, за каждый неправильный – снимается балл. Мансур ответил на все вопросы и получил 65 баллов. Сколько правильных ответов дал Мансур?

6.7. Деньги в остатке

Задача

Если Данияр купит 11 тетрадей, то у него останется 5 сомов, а на 15 тетрадей у него не хватает 9 сомов. Сколько денег останется у Данияра, если он купит 7 тетрадей?

Решение

Обозначим через p цену тетради, через R – количество денег у Данияра. Тогда в первом случае $11p + 5 = R$, во втором случае $15p - 9 = R$.

Запишем уравнения в виде системы:

$$\begin{cases} 11p + 5 = R \\ 15p - 9 = R \end{cases}$$

Возьмём выражение для R из первого уравнения системы и подставим во второе уравнение системы: $11p + 5 = 15p - 9$.

Приведём подобные члены: $14 = 4p$. Отсюда следует: $p = 14 : 4 = 3{,}5$.

Итак, цена тетради 3,5 сома.

Следовательно, у Данияра было $R = 11p + 5 = 11 \cdot 3{,}5 + 5 = 43{,}5$ сома.

Проверим правильность наших рассуждений, подставив найденные числа во второе уравнение: $15 \cdot 3{,}5 - 9 = 43{,}5$.

Теперь ответим на вопрос. Так как цена тетради 3,5 сома, на 7 тетрадей будет истрачено $7 \cdot 3{,}5 = 24{,}5$ сома. Поэтому у Данияра останется $43{,}5 - 24{,}5 = 19$ сомов.

163. Если Бермет купит 1,5 *кг* конфет, то у неё останется 470 сомов, а если 2,2 *кг*, то у неё останется 176 сомов. Сколько денег останется у Бермет, если она купит 1,8 *кг* конфет?

164. Если Турсун купит 2,5 *кг* печенья, то у него останется 75 сомов, а на покупку 4 *кг* у него не хватает 120 сомов. Сколько денег останется у Турсуна, если он купит 1,3 *кг* печенья?

165. Составьте и решите задачи, используя данные о покупках, которые совершили вы и члены вашей семьи.

6.8. Квадрат и другие фигуры

Задача

1) Периметр прямоугольной пластины равен 112 *см*, основание больше высоты на 14 *см*. Чему равна максимальная площадь квадрата, который можно вырезать из этой пластины?

2) Периметр прямоугольника, одна сторона которого совпадает со стороной равностороннего пятиугольника, а другая, смежная, – со стороной квадрата, равен 58 *мм*. При этом периметр пятиугольника больше периметра квадрата на 82 *мм*. Чему равна площадь квадрата?

Решение

1) Обозначим через a длину основания, через h – высоту пластины. Тогда имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} 2(a+h) = 112 \\ a - h = 14 \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим a: $a = 14 + h$ и подставим в первое уравнение системы: $2(14 + h + h) = 112$.

Разделим его на 2: $(14 + h + h) = 56$, приведём подобные члены: $2h = 42$.

Отсюда следует: $h = 42 : 2 = 21$, тогда $a = 14 + h = 14 + 21 = 35$.

Итак, высота пластины – 21 *см*, длина – 35 *см*.

Самый большой из возможных квадратов будет иметь сторону 21 *см*. Его площадь:

$21 \cdot 21 = 212 = 441$ *см*^{2}.

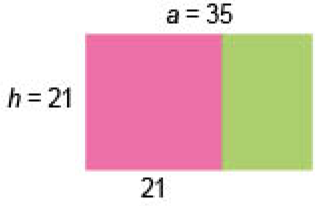


Рис. 24

2) Если a – основание, h – высота прямоугольника, то его периметр $2(a + h)$. Тогда периметр пятиугольника равен $5a$, а периметр квадрата – $4h$. Следовательно, условия задачи определяют систему уравнений:

$$\begin{cases} 2(a+h) = 58 \\ 5a - 4h = 14 \end{cases}$$

Разделим первое уравнение системы на 2, а затем выразим a: $a = 29 - h$ и подставим во второе уравнение системы: $5(29 - h) - 4h = 82$.

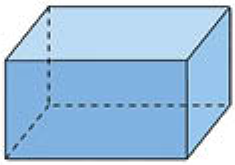
Раскроем скобки: $145 - 5h - 4h = 82$, приведём подобные члены: $-9h = -63$. Отсюда следует: $h = 7$, тогда $a = 29 - h = 29 - 7 = 22$.

Итак, высота прямоугольника – 7 *мм*, основание – 22 *мм*. Так как сторона квадрата равна $h = 7$, то его площадь равна $7 \cdot 7 = 49$ *мм*^{2}.

166. Периметр прямоугольника, одна сторона которого совпадает со стороной равностороннего треугольника, а другая – со стороной квадрата, равен 22 *см*. При этом периметр треугольника больше периметра квадрата на 12 *см*. Чему равна площадь квадрата?

167. Периметр прямоугольника равен 72 *см*, а разность между периметрами квадратов, которые имеют с ним общую сторону, равна 16 *см*. Чему равны основание и высота прямоугольника?

6.9. Площади поверхностей параллелепипеда



Задача

Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна 80 *м*^{2}, боковая поверхность больше основания на 35 *м*^{2}. Чему равна площадь основания?

Решение

Напомним, что полная поверхность прямоугольного параллелепипеда состоит из боковой поверхности и двух оснований. Боковая поверхность состоит из двух пар попарно равных прямоугольников.

Обозначим через S_h площадь боковой поверхности, через S_{ab} – площадь основания. Тогда площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда будет равна $S_h + 2S_{ab}$. Следовательно, имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} S_h + 2S_{ab} = 80 \\ S_h - S_{ab} = 35 \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим S_h: $S_h = 35 + S_{ab}$ и подставим в первое уравнение системы: $S_h + 2S_{ab} = (35 + S_{ab}) + 2S_{ab} = 80$. Приведём подобные члены: $3S_{ab} = 45$. Отсюда следует: $S_{ab} = 15$.

Итак, выяснилось, что площадь основания равна 15 *м*^{2}.

168. Площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда равна 48 *м*^{2}, при этом площадь одной боковой грани больше площади другой на 4 *м*^{2}. Чему равна площадь основания, если высота равна 2 *м*?

169. Длина каркаса (сумма длин всех рёбер) прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием равна 60 *см*, а высота больше стороны основания на 3 *см*. Чему равна высота?

6.10. Определение прибыли

Задача

Фирмы «Альфа» и «Бета» в первый год получили прибыль 432 млн сомов. Во второй год прибыль «Альфы» увеличилась на 25%, прибыль «Беты» уменьшилась на 20%, а общая прибыль не изменилась. Чему была равна прибыль каждой фирмы в первый год?

Решение

Обозначим через a прибыль «Альфы» в первый год, через b – прибыль «Беты» в первый год.

Тогда прибыль «Альфы» во второй год равна $1{,}25a$, прибыль «Беты» во второй год равна $0{,}8b$.

Напоминаем, что 1 процент – это 0,01.

Поэтому прибыль «Альфы» в первый год увеличилась на $0{,}25a$, прибыль «Беты» уменьшилась на $0{,}2b$.

Следовательно, имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} a + b = 432 \\ 1{,}25a + 0{,}8b = 432 \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим a: $a = 432 - b$ и подставим во второе уравнение: $1{,}25(432 - b) + 0{,}8b = 432$.

Раскроем скобки: $540 - 1{,}25b + 0{,}8b = 432$, приведём подобные члены: $-0{,}45b = -108$.

Отсюда следует: $b = (-108) : (-0{,}45) = 240$.

Итак, $b = 240$, тогда $a = 432 - b = 432 - 240 = 192$.

Выяснилось, что прибыль «Альфы» в первый год была 192 млн сомов, прибыль «Беты» в первый год была 240 млн сомов.

Проверку проведём по второму уравнению:

$1{,}25a + 0{,}8b = 1{,}25 \cdot 192 + 0{,}8 \cdot 240 = 240 + 192 = 432.$

170. У Мурата и Дили было 25 000 сомов. После того как Мурат истратил 55% своих денег, а Диля истратила 40% своих, у них осталось 12 600 сомов. Сколько денег осталось у Мурата?

171. Перед поездкой на Иссык-Куль общий вес Мээрим и Ислама был 92 *кг*. Во время отдыха Мээрим похудела на 4%, Ислам поправился на 5%. В результате их общий вес увеличился на 100 *г*. Сколько весил Ислам, вернувшись с Иссык-Куля?

6.11. Решение задач на смеси при помощи систем

Задача

1) Магазин имеет два вида конфет; первый – по 334 сома за килограмм, второй – по 280. Сколько килограммов конфет каждого вида нужно использовать для того, чтобы получить 90 килограммов смеси по 310 сомов за *кг*?

2) Магазин использовал два вида конфет – по 420 и по 355 сомов за килограмм – для изготовления смеси. Сколько килограммов конфет каждого вида было использовано, если получилась смесь по 300,75 сома за килограмм? Известно, что конфет первого вида использовано на 8 килограммов больше.

Решение

1) Обозначим через a вес конфет первого вида, через b – второго. Тогда имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} a + b = 90 \\ 334a + 280b = 90 \cdot 310 \end{cases}$$

Во втором уравнении системы $334a$ – выручка от продажи конфет первого вида; $280b$ – выручка от продажи конфет второго вида; $90 \cdot 310$ – выручка от продажи смеси.

Из первого уравнения системы выразим a: $a = 90 - b$ и подставим во второе уравнение системы: $334(90 - b) + 280b = 90 \cdot 310$.

Раскроем скобки: $30060 - 334b + 280b = 27900$; приведём подобные члены: $-54b = -2160$. Отсюда следует: $b = (-2160) : (-54) = 40$.

Итак, $b = 40$, тогда $a = 90 - b = 50$. То есть, если смешать 50 *кг* конфет первого вида и 40 *кг* конфет второго вида и продавать по 310 сомов, то выручка от продажи смеси будет равна выручке при раздельной продаже.

2) Если использовать те же обозначения, то имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} a - b = 8 \\ 420a + 355b = 390{,}75(a + b) \end{cases}$$

Во втором уравнении системы $390{,}75(a + b)$ – выручка от продажи смеси.

Из первого уравнения системы выразим a: $a = 8 + b$ и подставим во второе уравнение системы: $420(8 + b) + 355b = 390{,}75((8 + b) + b)$. Раскроем скобки: $3360 + 420b + 355b = 3126 + 781{,}5b$; приведём подобные члены: $-6{,}5b = -234$. Отсюда следует: $b = (-234) : (-6{,}5) = 36$.

Итак, $b = 36$, тогда $a = 36 + 8 = 44$. То есть, если смешать 44 *кг* конфет первого вида и 36 *кг* конфет второго вида и продавать по 390 сомов 75 тыйынов за килограмм, то выручка от продажи смеси будет равна выручке при раздельной продаже.

172. У Таалая 500 овец и коз. Средний вес овцы 38 *кг*, а вес козы равен 32 *кг*, средний вес животного в этом стаде составляет 37,1 *кг*. Сколько овец и сколько коз у Таалая?

173. Средний вес коровы на ферме – 348 *кг*, средний вес лошади – 320 *кг*, а средний вес животного на этой ферме составляет 339,6 *кг*. Определите количество коров и лошадей на ферме, зная, что коров на 20 больше.

174. Магазин имеет два вида печенья: по 140 сомов за килограмм и по 80 сомов за килограмм. Сколько килограммов печенья каждого вида нужно использовать для того, чтобы получить 60 *кг* смеси по 117 сомов за *кг*?

175. Магазин использовал два вида печенья – по 125 сомов за килограмм и по 105 сомов за килограмм – для изготовления смеси. Сколько килограммов печенья каждого вида было использовано, если получилась смесь по 117,5 сома за *кг*? Известно, что печенья первого вида использовано на 16 *кг* больше.

6.12. Определение необходимых объёмов растворов

Задача

Для приготовления 60 литров 41% раствора соли использовались 44% и 32% растворы. Сколько литров каждого раствора было использовано?

Решение

Выражение 41% раствор соли означает, что 41% жидкости в растворе составляет соль. То есть в 60 литрах раствора будет $0{,}41 \cdot 60$ соли. Тогда, если объём первого раствора обозначить x, то соли в нём будет $0{,}44x$. Соответственно, если объём второго раствора равен y, то соли в нём будет $0{,}32y$. Тогда имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ 0{,}44x + 0{,}32y = 0{,}41 \cdot 60 \end{cases}$$

Второе уравнение системы указывает на то, что количество соли в исходных растворах равно количеству соли в приготовленном.

Из первого уравнения системы выразим x: $x = 60 - y$ и подставим во второе уравнение: $0{,}44\,(60 - y) + 0{,}32y = 0{,}41 \cdot 60$.

Раскроем скобки: $26{,}4 - 0{,}44y + 0{,}32y = 24{,}6$; приведём подобные члены: $-0{,}12y = -1{,}8$.

Отсюда следует: $y = (-1{,}8) : (-0{,}12) = 15$.

Поэтому $x = 45$.

Итак, если смешать 45 литров 44% раствора соли и 15 литров 32%, то получится 60 литров раствора, в котором соль занимает 41%.

176. Для приготовления 50 литров 22% раствора соли использовались 25% и 10% растворы. Сколько литров каждого раствора было использовано?

177. Для приготовления 100 литров 45% раствора соли использовались 55% и 30% растворы соли. Сколько литров каждого раствора было использовано?

178. Сочините две задачи, подобные задачам, рассмотренным в данном параграфе.

1. Салтанат купила по одному килограмму сладостей двух видов, заплатив 17 лир. Килограмм сладостей первого вида стоит на 1,4 лиры дороже (лиры – турецкие деньги).

Сколько стоит один *кг* сладостей каждого вида?

2. Решите системы:

a) $\begin{cases} a + b = 42 \\ 2a + 18b = 420 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 25p - 49 = R \\ 12p + 68 = R \end{cases}$

b) $\begin{cases} a - b = 43 \\ 125a + 8b = -110 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 5x + 80y = 130 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5(x + y) = 40 \\ 21x - 8y = -35 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 5s - 7t = 18{,}9 \\ s + 4t = -8{,}1 \end{cases}$

3. На школьной викторине участникам предложили 20 вопросов. За правильный ответ ученику давали 12 очков, за неправильный ответ снимали 10 очков. Сколько правильных ответов дал ученик, который ответил на все вопросы и набрал 64 очка?

4. На скотном дворе гуляли овцы и гуси. Мальчик посчитал, что количество голов – 33, а количество ног – 91. Определите, сколько было овец и гусей?

5. Сколько трёхколёсных и сколько двухколёсных велосипедов можно собрать, имея 20 колёс и 8 сидений?

6. Чашка и блюдце вместе стоят 37 сомов, а 3 чашки и 5 блюдец стоят 145 сомов. Сколько стоят 5 чашек и 3 блюдца?

7. У Арстана 20 коз и овец общим весом 760 *кг*. Сколько овец у Арстана, если средний вес козы – 30 *кг*, а средний вес овцы – 40 *кг*?

8. За неделю Знайка и Незнайка получили 27 оценок, сумма которых равна 99. Сколько оценок получил Незнайка, если известно, что он получал только двойки, а Знайка – только пятёрки?

9. По контракту работникам причитается 48 франков за каждый отработанный день, а за каждый пропущенный день с них вычитается 12 франков.

Через 30 дней выяснилось, что работникам ничего не причитается. Сколько дней они отработали в течение этих 30 дней?[1]

10. Периметр прямоугольника равен 480 *см*. Если основание увеличить на 15%, а высоту уменьшить на 5%, то периметр нового прямоугольника будет равен 536 *см*. Чему равна площадь нового прямоугольника?

11. Цена шляпы и кепки 400 сомов, 2 шляп и 3 кепок – 950 сомов. Найдите цену шляпы и цену кепки.

12. В кинотеатре было продано 40 билетов на 2700 сомов. Сколько взрослых и детских билетов было продано, если цена первых – 80 сомов, вторых – 30 сомов?

13. Из аэропорта в северном и южном направлениях вылетели два самолёта. Самолёт, летящий на север, пролетает на 40 *км* в час больше другого. К концу третьего часа расстояние между ними составило 1800 *км*. Найдите скорости самолётов.

14. Из аэропорта в одном направлении с разницей в 45 минут вылетели два самолёта. Первый самолёт пролетает на 140 *км* в час больше другого. Через два часа после вылета второго самолета расстояние между ними составило 895 *км*. Найдите скорости самолётов.

15. У Касыма 200 яков и коз. Средний вес яка – 98 *кг*, козы – 30 *кг*, а средний вес животного в этом стаде – 58,9 *кг*. Сколько яков и сколько коз у Касыма?

16. Средний рост мальчиков в классе – 134 *см*, средний рост девочек – 140 *см*, а средний рост учащихся в этом классе – 136,4 *см*. Известно, что мальчиков больше на 5. Определите, сколько мальчиков и сколько девочек в этом классе.

17. Средний рост мальчиков в классе – 144 *см*, средний рост девочек – 146 *см*, а средний рост учащихся в этом классе составляет 146,5 *см*. Определите, сколько мальчиков и сколько девочек в этом классе, если их всего 32.

18. На скотном дворе гуляли овцы и гуси. Мальчик посчитал, что количество голов – 33, а количество ног – 136. Определите, сколько было овец, а сколько гусей?

19. Для приготовления 50 литров 37,8% раствора соли использовались 42% и 28% растворы. Сколько литров каждого раствора было использовано?

[1] Задача Э. Безу.

§7. Свойства позиционной системы записи натуральных чисел

7.1. Выполняя домашнее задание

Сочиняя задачу на свойства натуральных чисел, Акылай придумала следующую: найти двузначное натуральное число, сумма цифр которого равна 18. Тентек, который был занят своими делами, вспомнил об этом задании в последний момент. Он заглянул в тетрадь к Акылай, обрадовался и сказал, что таких задач он может сочинить сколько угодно. У себя он записал две задачи.

Первая. Найти двузначное натуральное число, сумма цифр которого равна 22.

Вторая. Найти двузначное натуральное число, сумма цифр которого равна 8.

Давайте вместе разберёмся с этими задачами. Предварительно не помешает вспомнить некоторые определения.

> Числа 1, 2, 3.., употребляемые при счёте, называются **натуральными**.
>
> Множество натуральных чисел обозначается символом N.
>
> Для записи натуральных чисел используется позиционная десятичная система, называемая **арабской**.
>
> В ней используются десять значков, которые называются **цифрами**: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
>
> Весомость каждой цифры определяется местом. Если читать (как это принято у арабов) запись натурального числа справа налево, то первая цифра означает число единиц, вторая – десятков, третья – сотен и т. д.
>
> Например: $29872 = 2 + 7 \cdot 10 + 8 \cdot 100 + 9 \cdot 1000 + 2 \cdot 10\,000$.
>
> В случаях, когда для условной записи арабских чисел используются буквы, этот факт выделяется чертой сверху. Например: $\overline{abcd} = 1549$, если $a = 1$; $b = 5$; $c = 4$; $d = 9$.
>
> Если при записи натурального числа использованы две цифры, то это двузначное число, если три цифры – трёхзначное.
>
> Если при записи натурального числа на первое место поставлен нуль или несколько нулей, то они не учитываются.
>
> Так, 0317 – трёхзначное число, 0044 – двузначное число.

В задаче Акылай требуется найти число $\overline{ab}$, где $a + b = 18$. Так как a и b являются цифрами, они не могут быть больше 9. Поэтому ответ: искомое число 99.

В первой задаче Тентека решения не существует: чтобы существовало число $\overline{ab}$, где $a + b = 22$, хотя бы одно из чисел, a или b, должно быть больше 10. А это невозможно, потому что a и b являются цифрами.

Вторая задача Тентека однозначного решения не имеет. В ней требуется найти число $\overline{ab}$, где $a + b = 8$. Но решениями этой задачи могут быть несколько пар натуральных чисел. Например:

$a = 2$, $b = 6$; $a = 1$, $b = 7$; $a = 8$, $b = 0$; $a = 6$, $b = 2$.

179. Найдите все двузначные натуральные числа с суммой цифр 4.

180. Найдите все двузначные натуральные числа с суммой цифр 17.

7.2. Определение цифр двузначного числа

Задача

Сумма цифр двузначного числа 10, а число десятков превосходит число единиц на 4. Найдите это число.

Решение

Обозначим искомое число $\overline{xy}$. Тогда имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ y - x = 4 \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выразим x: $x = 10 - y$ и подставим во второе уравнение: $y - (10 - y) = 4$.

Раскроем скобки: $y - 10 + y = 4$; приведём подобные члены: $2y = 14$.

Отсюда следует: $y = 7$. Поэтому $x = 3$.

Итак, искомое число 73.

181. Найдите двузначное число, у которого число десятков меньше числа единиц на 3, а утроенное число десятков больше числа единиц на 5.

182. Найдите двузначное число, у которого число десятков больше числа единиц на 5, а сумма удвоенного числа десятков и числа единиц равна 13.

7.3. Определение цифр трёхзначного числа

Задача

Сумма цифр трёхзначного числа 17, причём число сотен равно числу единиц, а удвоенное число десятков больше числа единиц на 9. Найдите это число.

Решение

В данном случае искомое число можно записать в виде $\overline{xyx}$. Тогда имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} x + y + x = 17 \\ 2y - x = 9 \end{cases}; \qquad \begin{cases} 2x + y = 17 \\ x = 2y - 9 \end{cases}$$

Значение x из второго уравнения системы подставим в первое уравнение: $2(2y - 9) + y = 17$.

Раскроем скобки: $4y - 18 + y = 17$; приведём подобные члены: $5y = 35$.

Отсюда следует: $y = 7$. Тогда $x = 2y - 9 = 5$.

Следовательно, искомое число 575.

183. Найдите трёхзначное число с суммой цифр 13, у которого число десятков меньше числа единиц на 7, а число десятков равно числу сотен.

184. Найдите трёхзначное число с суммой цифр 11, у которого число сотен равно числу единиц, а сумма утроенного числа десятков и числа единиц равна 13.

7.4. Нахождение двузначного числа

Задача

Сумма цифр двузначного числа 11. Если цифры в этом числе поменять местами, то получится число, превосходящее исходное число на 27. Найдите это число.

Решение

Напоминаем, что в используемой нами арабской системе записи чисел весомость каждой цифры определяется местом, на котором она стоит.

Поэтому в данном случае искомое число удобно записать в виде $10x + y$, где x – число десятков, y – число единиц. Тогда в результате замены получится число $10y + x$.

Следовательно, имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ (10y + x) - (10x + y) = 27 \end{cases}$$

Во втором уравнении системы раскроем скобки: $10y + x - 10x - y = 27$ и приведём подобные члены: $9y - 9x = 27$.

Если вынести 9 за скобки: $9(y - x) = 27$ и разделить на него всё уравнение, то оно примет вид $y - x = 3$.

Теперь из первого уравнения системы выразим y: $y = 11 - x$ и подставим в полученное уравнение: $(11 - x) - x = 3$.

Отсюда следует: $11 - x - x = 3; -2x = -8$.

Поэтому решение системы: $x = 4; y = 7$, а искомое число 47.

185. Сумма цифр двузначного числа 8. Если цифры в этом числе поменять местами, то полученное число будет меньше исходного числа на 54. Найдите это число.

186. Сумма цифр двузначного числа 10. Если цифры в этом числе поменять местами, то получится число, превосходящее исходное число на 18. Найдите это число.

7.5. Нахождение трёхзначного числа

Задача

Сумма цифр трёхзначного числа 12, причём число сотен равно числу десятков. Если первую и третью цифры в этом числе поменять местами, то получится число, превосходящее исходное на 297. Найдите это число.

Решение

Искомое число запишем в виде $100x + 10x + y$, где x – число сотен и число десятков, y – число единиц.

Тогда в результате замены получится число $100y + 10x + x$. Следовательно, имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} x + x + y = 12 \\ (100y + 10x + x) - (100x + 10x + y) = 297 \end{cases}$$

Во втором уравнении системы раскроем скобки:

$100y + 10x + x - 100x - 10x - y = 297$

и приведём подобные члены: $99y - 99x = 297$. Если вынести число 99 за скобки: $99(y - x) = 297$ и разделить на 99 всё уравнение, то оно примет вид $y - x = 3$.

Теперь из первого уравнения системы выразим y: $y = 12 - 2x$ и подставим в полученное уравнение: $(12 - 2x) - x = 3$.

Отсюда следует: $12 - 2x - x = 3; -3x = -9$.

Поэтому решение системы: $x = 3; y = 6$, а искомое число 336.

187. Сумма цифр трёхзначного числа 15, причём число сотен равно числу единиц. Если вторую и третью цифры в этом числе поменять местами, то получится число, которое меньше исходного на 27. Найдите это число.

188. Сумма цифр трёхзначного числа 12, причём число десятков равно числу единиц. Если первую и вторую цифры в этом числе поменять местами, то получится число, которое больше исходного на 270. Найдите это число.

7.6. От двузначного числа к трёхзначному

Задача

Сумма цифр двузначного числа 11. Если после цифр этого числа написать цифру 3, то получится число, которое больше исходного на 831. Найдите это число.

Решение

Искомое число запишем в виде $10x + y$, где x – число десятков, y – число единиц.

Тогда в результате дописывания получится число $100x + 10y + 3$.

Следовательно, имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ (100x + 10y + 3) - (10x + y) = 831 \end{cases}$$

Во втором уравнении системы раскроем скобки:

$100x + 10y + 3 - 10x - y = 831$; приведём подобные члены: $90x + 9y = 828$.

Теперь из первого уравнения системы выразим y: $y = 11 - x$ и подставим в полученное уравнение: $90x + 9(11 - x) = 828$.

Отсюда следует: $90x + 99 - 9x = 828$; $81x = 729$.

Поэтому решение системы: $x = 9$; $y = 2$, а искомое число 92.

189. Сумма цифр двузначного числа 8. Если между цифрами этого числа вписать цифру 6, то получится число, которое больше исходного на 510. Найдите это число.

190. Сумма цифр двузначного числа 10. Если после цифр этого числа написать цифру 7, то получится число, которое больше исходного на 259. Найдите это число.

7.7. От двузначного числа к четырёхзначному

Задача

Сумма цифр двузначного числа 15. Если между цифрами этого числа вставить число 31, то получится число, которое больше исходного на 7240. Найдите это число.

Решение

Искомое число запишем в виде $10m + n$, где m – число десятков, n – число единиц. Тогда в результате вписывания получится число $1000m + 3 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + n$.

Следовательно, имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} m + n = 15 \\ (1000m + 3 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + n) - (10m + n) = 7240 \end{cases}$$

Во втором уравнении системы раскроем скобки и приведём подобные члены: $990m = 6930$. Следовательно, $m = 7$.

Теперь из первого уравнения системы найдём n: $n = 15 - 7 = 8$.

Искомое число 78.

191. Сумма цифр двузначного числа 8. Если после этого числа без пробела написать число 61, то получится число, которое больше исходного на 3526. Найдите это число.

192. Сумма цифр двузначного числа 13. Если между цифрами этого числа вписать число 17, то получится число, которое больше исходного на 4130. Найдите это число.

7.8. От трёхзначного числа к трёхзначному

Задача

Если от трёхзначного числа x отнять число, полученное из x путём перестановки первой и третьей цифр, то получится 792. Найдите x, зная, что сумма цифр, использованных при его записи, равна 18.

Решение

Обозначим искомое число $\overline{abc}$. Тогда $x = 100a + 10b + c$ и из первого условия $(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 792$.

Раскрыв скобки и сгруппировав, получим $99(a - c) = 792$.

Отсюда следует: $a - c = 8$.

Так как a и c являются цифрами, они могут быть равны только 0, 1, 2... 9. Поэтому уравнение $a - c = 8$ имеет два решения: (9; 1), (8; 0).

Теперь воспользуемся условием $a + b + c = 19$.

Если $a = 8$; $c = 0$, то $b = 10$. Этого не может быть, потому что b также является цифрой. Поэтому $a = 9$; $c = 1$ и, следовательно, $b = 8$.

Итак, ответ: $x = 981$.

193. Если от двузначного числа y отнять число, полученное из y путём перестановки цифр, то получится 81. Найдите y.

194. Если от трёхзначного числа z отнять число, полученное из z путём перестановки первой и второй цифр, то получится 630. Найдите z, зная, что сумма цифр, использованных при его записи, равна 20.

7.9. От двузначного числа к цифре

Задача

Определите двузначное число, зная, что, убрав цифру 6, стоящую на втором месте, получим тот же результат, какой получится при делении этого числа на двенадцать.

Решение

Обозначим искомое число $\overline{x6} = x \cdot 10 + 6$.

Если в выражении $\overline{x6}$ убрать цифру 6, то получится число x. Так как оно также получается в результате деления искомого числа на 12, то искомое число $x \cdot 10 + 6$ можно записать в виде $12x$.

Итак, получается уравнение: $x \cdot 10 + 6 = 12x$. Приведём подобные члены: $6 = 2x$ и получим $x = 3$.

Следовательно, искомое число 36.

Результат можно проверить по условиям задачи: убираем в числе 36 цифру 6 – получаем 3; делим 36 на 12 – также получаем 3.

195. Определите трёхзначное число, зная, что, убрав цифру 3, стоящую на первом месте, и цифру 6, стоящую на третьем месте, получим тот же результат, какой получится в результате деления этого числа на 163.

196. Определите двузначное число, зная, что, убрав цифру 4, стоящую на первом месте, получим тот же результат, какой получится в результате деления этого числа на девять.

7.10. От трёхзначного числа к двузначному

Задача

Определите трёхзначное число с суммой цифр 12, зная, что, убрав цифру 9, стоящую на втором месте, получим тот же результат, какой получится при делении этого числа на шестнадцать.

Решение

Обозначим искомое число $\overline{x9y} = x \cdot 100 + 9 \cdot 10 + y$.

Тогда из условия на сумму цифр $x + 9 + y = 12$; $x + y = 3$.

Если в выражении $\overline{x9y}$ убрать цифру 9, то получится число: $10x + y$. Так как оно также получается в результате деления искомого числа на 16, то искомое число $x \cdot 100 + 9 \cdot 10 + y$ можно записать в виде $16(10x + y)$.

Итак, получается уравнение $x \cdot 100 + 9 \cdot 10 + y = 16(10x + y)$.

Раскроем скобки и приведём подобные члены: $60x + 15y = 90$.

В итоге получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 60x + 15y = 90 \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выразим y: $y = 3 - x$ и подставим во второе уравнение: $60x + 15(3 - x) = 90$.

Отсюда следует: $60x + 45 - 15x = 90$; $45x = 45$.

Поэтому решение системы: $x = 1$; $y = 3 - x = 2$, а искомое число 192.

Результат можно проверить: убираем в числе 192 цифру 9, получаем 12; делим 192 на 16, также получаем 12.

197. Определите трёхзначное число с суммой цифр 18, зная, что, убрав цифру 9, стоящую на первом месте, получим тот же результат, какой получится при делении этого числа на 51.

198. Определите трёхзначное число с суммой цифр 11, зная, что, убрав цифру 4, стоящую на втором месте, и поменяв местами оставшиеся цифры, получим число, которое получится при делении искомого числа на 8.

199. Сочините две задачи, подобные задачам, рассмотренным в данном параграфе.

1. Найдите четырёхзначное число с суммой цифр 1.

2. Найдите трёхзначное число с суммой цифр 27.

3. Найдите все двузначные натуральные числа с суммой цифр: a) 3; b) 16.

4. Найдите все трёхзначные натуральные числа с суммой цифр: a) 2; b) 26.

5. Найдите двузначное число, у которого число десятков больше числа единиц на 3, а сумма числа десятков и удвоенного числа единиц равна 21.

6. Найдите трёхзначное число с суммой цифр 6, у которого число десятков меньше удвоенного числа единиц на 7, а число десятков равно числу сотен.

7. Найдите трёхзначное число с суммой цифр 8, у которого число сотен равно числу единиц, а сумма удвоенного числа десятков и утроенного числа единиц равна 13.

8. Сумма цифр двузначного числа 11. Если цифры в этом числе поменять местами, то получится число, которое меньше исходного на 63. Найдите это число.

9. Сумма цифр трёхзначного числа 13, причём число сотен равно числу единиц. Если первую и вторую цифры в этом числе поменять местами, то получится число, превосходящее исходное число на 360. Найдите это число.

10. Сумма цифр двузначного числа 3. Если между цифрами этого числа вписать цифру 1, то получится число, которое больше исходного на 190. Найдите это число.

11. Сумма цифр двузначного числа 7. Если после цифр этого числа написать цифру 5, то получится число, которое больше исходного на 311. Найдите это число.

12. Собираясь напечатать двузначное число, по ошибке его напечатали дважды. В результате получилось четырёхзначное число, которое больше запланированного на 5600. Какое число собирались напечатать?

13. Сумма цифр двузначного числа 13. Если после этого числа без пробела написать число 26, то получится число, которое больше исходного на 5768. Найдите это число.

14. Сумма цифр двузначного числа 14. Если между цифрами этого числа вписать число 73, то получится число, которое больше исходного на 8650. Найдите это число.

15. Если от трёхзначного числа *T* отнять число, полученное из *T* путём перестановки второй и третьей цифр, то получится 54. Найдите *T*, зная, что сумма цифр, использованных при его записи, равна 8.

16. Определите двузначное число, зная, что, убрав цифру 4, стоящую на втором месте, получим тот же результат, какой получится в результате деления этого числа на 12.

17. Определите трёхзначное число, зная, что, убрав цифру 4, стоящую на втором месте, и цифру 2, стоящую на третьем месте, получим тот же результат, какой получится в результате деления этого числа на 114.

18. Определите трёхзначное число с суммой цифр 9, зная, что, убрав цифру 6, стоящую на первом месте, получим тот же результат, какой получится при делении этого числа на 21.

19. Определите трёхзначное число с суммой цифр 9, зная, что, убрав цифру 0, стоящую на третьем месте, и поменяв местами оставшиеся цифры, получим число, которое получится при делении искомого числа на 12.

§ 8. Делимость чисел

8.1. Определение делимости

Будем говорить, что число n делится на число k, если число n является произведением числа k и числа m, то есть, если справедливо равенство $n = km$, где n, k, m – целые числа (запись km читается так же, как и $k \cdot m$: k умножить на m).

Например, 18 делится на 2 и 9 и не делится на 7 и 4.

200. Верно ли утверждение, что 56 делится на:

a) 4; b) 14; c) 3; d) 7; e) 12; f) 16?

201. Верно ли утверждение, что 68 делится на:

a) 4; b) 14; c) 3; d) 17; e) 21; f) 8?

Делителем натурального числа a называется натуральное число, на которое число a делится без остатка. Число 1 является делителем любого натурального числа.

8.2. Теорема о делимости

При вычислениях часто бывает важно разложить число на сомножители – записать его в виде произведения меньших чисел, например: $44 = 4 \cdot 11$, $27 = 3 \cdot 9$, $240 = 40 \cdot 6$, $174 = 6 \cdot 29$.

При выполнении операции разложения на множители помогают признаки делимости.

Чтобы получить эти признаки, будет использоваться теорема, которую мы сейчас докажем.

Теоремой называется утверждение, устанавливаемое путём математического рассуждения – доказательства.

Теорема 1

a) Если число n делится на r, то и число nt делится на r (n, t – целые числа).

b) Число $k = m + s$ делится на p, если и m, и s делятся на p ($k, m, s, p \in Z$ – эта запись означает, что k, m, s, p – целые числа).

Доказательство

a) Если n делится на r, то $n = rq$ (q – целое число).

Тогда $nt = (rq)t = r(qt)$. Так как произведение целых чисел всегда целое число, из определения делимости следует требуемое.

b) Если m делится на p, то $m = pr$; если s делится на p, то $s = pt$, где r и t – целые числа.

Поэтому $k = m + s = pr + pt = p(r + t)$. Так как сумма целых чисел – всегда целое число, $r + t$ – целое число. Тогда из определения делимости следует требуемое.

Задача

Показать, что:

a) число 34 000 делится на 17;
b) число 3838 делится на 19;
c) число 721 делится на 7;
d) число 2639 делится на 13;
e) числа 30; 310; 2500; 17 020 делятся на 10.

Решение

a) Число 34 000 делится на 17, потому что $34000 = 34 \cdot 1000$ и 34 делится на 17.

b) Число 3838 делится на 19, потому что $3838 = 38 \cdot 100 + 38$ и 38 делится на 19.

c) Число 721 делится на 7, потому что $721 = 700 + 21 = 7 \cdot 100 + 21$; число 7 делится на 7, и 21 делится на 7.

d) Число 2639 делится на 13 потому что $2639 = 2600 + 39 = 26 \cdot 100 + 39$; число 26 делится на 13, и 39 делится на 13.

e) Числа 30; 310; 2500; 17020 делятся на 10, потому что их можно записать в виде $3 \cdot 10$; $31 \cdot 10$; $25 \cdot 100$; $1702 \cdot 10$.

Результаты пункта e) можно обобщить.

Любое число, которое заканчивается на нуль, делится на 10.

202. Показать, что:

a) число 749 делится на 7;
b) число 369 делится на 9;
c) число 121 делится на 11;
d) число 1339 делится на 13;
e) число 363 делится на 33;
f) число 360 024 делится на 12.

203. Показать, что:

a) число 618 делится на 6;
b) число 3606 делится на 6;
c) число 2121 делится на 21;
d) число 1734 делится на 17;
e) число 9632 делится на 32;
f) число 193 857 делится на 19.

8.3. Делимость на 2

Числа, делящиеся без остатка на 2, называются **чётными**, а числа, которые при делении на 2 дают остаток 1, называются **нечётными**.

Если запись натурального числа заканчивается чётной цифрой, то это число чётно (делится без остатка на 2), а если запись натурального числа заканчивается нечётной цифрой, то это число нечётно. Существует и другое определение чётного числа.

Целые числа, которые заканчиваются на 0, или 2, или 4, или 6, или 8, называются чётными, остальные – нечётными.

Мы знаем, что и 0, и 2, и 4, и 6, и 8, и 10 делятся на два. Согласно теореме, любое чётное число делится на 2. Например, 372 делится на два, потому что число 372 можно записать в виде $372 = 37 \cdot 10 + 2$, где оба слагаемых в правой части делятся на 2.

Признак делимости на 2

Число делится на 2, если оно чётное. Другими словами, целое число делится на 2, если последней цифрой в записи этого числа будет или 0, или 2, или 4, или 6, или 8.

Признак делимости на 2 позволяет дать другое определение чётного числа: если целое число m можно записать в виде $m = 2n$, где n – целое число, то число m называется чётным.

204. Дайте определение нечётных чисел, не пользуясь термином *чётные числа*. Используйте это определение чтобы определить чётные числа.

205. Из множества {3; 6; 14; 207; −4; 168; −11; 40; −77} выделить подмножество всех его элементов, которые делятся на 2.

206. Запишите в виде произведения с множителем 2 (например: $74 = 2 \cdot 37$) число:

a) 14; b) 38; c) 26; d) 334; e) 3638; f) 3610024.

207. Из множества {31; 62; −47; 20; −54; 689; −112; 407; −307} выделить подмножество всех его элементов, которые являются нечётными числами.

208. Запишите в виде произведения с множителем 2 число:

a) 46; b) 58; c) 662; d) 2334; e) 8638; f) 61200242.

В завершение этого пункта приведём доказательство признака делимости на 2.

Пусть $K = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$, где a_i – цифры, $i = 0, 1, 2 \ldots n$.

Тогда число K делится на 2, если на 2 делится цифра a_0.

Доказательство

Число 56 можно записать как $56 = 5 \cdot 10 + 6$; число $89018 = 8901 \cdot 10 + 8$ и т. п.

В общем виде мы можем записать любое число K в виде:

$$K = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1} \cdot 10 + \overline{a_0} \qquad (1)$$

Из пункта **a** теоремы **1** следует, что первое слагаемое в правой части равенства (1) делится на 2, так как 10 делится на 2. Следовательно, из пункта **b** теоремы **1**, число K всегда делится на 2, если на 2 делится второе слагаемое в правой части равенства (1) – цифра a_0 – цифра, на которую заканчивается число.

8.4. Свойства чётных и нечётных чисел

209. В классе разбейтесь на группы по 3 человека. Пусть каждый назовёт целое число. Убедитесь в том, что среди названных чисел есть два числа, сумма которых является чётным числом.

Сформируйте новые тройки и назовите другие числа. Теперь убедитесь в том, что среди названных чисел есть два числа, разность которых является чётным числом.

Сформулируйте соответствующие свойства, вставив слово *чётное* или *нечётное*:

– *Сумма двух чётных чисел всегда … число.*
– *Сумма двух нечётных чисел всегда … число.*
– *Сумма чётного и нечётного чисел всегда … число.*
– *Разность двух чётных чисел всегда … число.*
– *Разность двух нечётных чисел всегда … число.*
– *Разность чётного и нечётного чисел всегда … число.*
– *Разность нечётного и чётного чисел всегда … число.*

Нетрудно получить подобные свойства для произведения целых чисел.

Произведение чётного числа и любого целого числа – всегда чётное число.

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно вспомнить, что любое чётное число m можно представить в виде $m = 2n$, где n – целое число. Умножив это число на целое число p, получим число $2np$, где np – целое число. Следовательно, произведение $mp = 2np$ – чётное число.

Произведение нечётных чисел – всегда нечётное число.

Если хотя бы один сомножитель является чётным, то произведение является чётным числом. Поэтому, умножив нечётное число на нечётное, всегда получим нечётное:

$89 \cdot 1 = 89$; $3 \cdot 11 = 33$; $83 \cdot 77 = 6391$; $87 \cdot 53 = 4452$.

Задача

a) Асыл купила 17 платьев по цене 1349 сомов и 3 юбки по цене 913 сомов. Когда продавец сказал, что она должна заплатить 25 873 сома, она попросила его пересчитать. Продавец пересчитал, извинился за ошибку и удивлённо спросил: «Как вы сумели всё так быстро посчитать, не пользуясь калькулятором?» Что ответила Асыл?

b) Акылай купила 7 шоколадок по цене 49 сомов 25 тыйынов и 4 пачки печенья. Когда продавец сказал, что она должна заплатить 503 сома и 80 тыйынов, она сказала, что это ошибка и попросила его пересчитать. Тентек, который стоял рядом, удивленно спросил: «Почему ты так говоришь? Ты ведь не знаешь цену печенья». Что ответила Акылай?

Решение

a) Асыл ответила: «Нетрудно понять, что стоимость покупки должна быть чётным числом».

Подробнее. Стоимость покупки есть число $17 \cdot 1349 + 3 \cdot 913$. Оба произведения равны нечётному числу, потому что являются произведением нечётных чисел. Следовательно, стоимость покупки, являющаяся суммой двух нечётных чисел, есть чётное число, а продавец назвал нечётное число.

b) Акылай ответила: «Нетрудно понять, что стоимость покупки должна быть нечётным числом».

Подробнее. За шоколадки необходимо отдать $7 \cdot 4925$ *тыйынов* – нечётное число тыйынов. Так как куплено 4 пачки печенья – чётное число пачек печенья, то за печенье нужно отдать $4 \cdot$ (*цена печенья*) – чётное число тыйынов. Сумма нечётного и чётного чисел является нечётным числом, а продавец попросил 50 380 тыйынов – чётное число.

210. Определите, является ли чётным числом результат вычисления.

a) $7 \cdot 49 + 7$
b) $36 \cdot 9 - 9$
c) $12 \cdot 103 + 11 \cdot 36$
d) $133 \cdot 98 - 13 \cdot 71$
e) $36 - 32 \cdot 52 + 33$
f) $36 \cdot 41 - 8 + 17 \cdot 29$

211. Определите, является ли нечётным числом результат вычисления.

a) $72 \cdot 9 + 17$
b) $63 \cdot 19 - 209$
c) $217 \cdot 35 - 215 \cdot 36$
d) $321 \cdot 82 - 32 \cdot 17 - 2$
e) $66 + 342 \cdot 5 - 13$
f) $68 \cdot 54 - 811 + 74 \cdot 9$

8.5. Деление с остатком

Задача

Два бельчонка Пушик и Рыжик нашли мешок с орешками и начали их делить. Они договорились, что будут по очереди брать по 17 орешков. Первым взял Пушик, потом Рыжик, затем Пушик и так далее. Кто взял последние орешки из мешка, если в нём было: 1) 408; 2) 536 орешков?

Сколько орешков досталось Пушику, сколько – Рыжику?

Решение

Если мысленно разложить орешки на кучки по 17 орешков, то первую, третью, пятую и так далее нечётные кучки взял Пушик. Соответственно, вторую, четвёртую и так далее чётные кучки взял Рыжик. Поэтому, разделив количество орешков на 17, узнаем число кучек и того, кто брал орешки последним.

1) Если в мешке было 408 орешков, то $408 : 17 = 24$. Итак, кучек было 24, и последнюю, двадцать четвёртую, чётную кучку, взял Рыжик.

Так как число кучек чётное, то каждому из бельчат досталось одинаковое количество: $12 \cdot 17 = 204$ орешка.

2) Начав делить 536 на 17, получим 31 и ещё остаток. Это означает, что после тридцать первой кучки, которую взял Пушик, в мешке ещё оставались орешки. Их получил Рыжик. Нетрудно выяснить сколько – это величина остатка при делении.

В тридцати одной кучке $31 \cdot 17 = 527$ орешков. После них в мешке осталось $536 - 527 = 9$ орешков.

После того как были поделены 30 кучек, каждому досталось по $30 : 2 = 15$ кучек. Следующую кучку взял Пушик, то есть ему досталось 16 кучек, в которых было $16 \cdot 17 = 272$ орешка.

Узнать долю Рыжика можно двумя способами.

Первый: вычесть из общего количества долю Пушика.

$536 - 272 = 264$ орешка.

Второй: узнать, сколько орешков в пятнадцати кучках и добавить к ним орешки из последней, неполной кучки. Конечно же, получим тот же результат:

$15 \cdot 17 + 9 = 264$ орешка.

212. Два зайца, Шустрик и Быстрик, вырастили много моркови и начали её делить. Они договорились, что будут по очереди брать по 23 морковки. Первым взял Шустрик, потом Быстрик, затем Шустрик и так далее. Кто взял последние морковки, если всего было выращено: a) 828; b) 621; c) 655; d) 400 морковок?

Сколько морковок досталось Шустрику, сколько – Быстрику?

213. Две сороки Шурша и Бырша украли много бусинок и начали их делить. Они договорились, что будут по очереди брать по 16 бусинок. Первой взяла Шурша, потом Бырша, затем Шурша и так далее. Кто взял последние бусинки, если всего было: a) 256; b) 176; c) 235; d) 310 бусинок?

Сколько бусинок досталось Шурше, сколько – Бырше?

8.6. Делимость на 5

Обратившись к таблице умножения на 5, можно увидеть, что произведение всегда оканчивается на 0 или на 5.

Несложно показать, что любое число, заканчивающееся на 0 или на 5, делится на 5.

Например, число 9925 делится на 5, потому что его можно записать в виде $9925 = 992 \cdot 10 + 5$, где оба слагаемых в правой части делятся на 5. То же самое можно сказать о числе 567 890: число 567 890 делится на 5, потому что его можно записать в виде $567\,890 = 56\,789 \cdot 10 + 0$, где оба слагаемых в правой части делятся на 5. Эти наблюдения позволяют сформулировать признак делимости на 5.

Признак делимости на 5

Целое число делится на 5, если последней цифрой в записи этого числа будет 0 или 5.

214. Делится ли на 5 число:

a) 7497; b) 36990; c) 121035; d) 133980; e) 3411729?

215. Запишите в виде произведения с множителем 5 (например: $70 = 5 \cdot 14$) число:

a) 140; b) 385; c)265; d) 3340; e) 6385; f) 100245.

216. Делится ли на 5 число:

a) 217; b) 84675; c) 33210; d) 555351; e) 1217290?

217. Запишите в виде произведения с множителем 5 число:

a) 460; b) 585; c) 6625; d) 2330; e) 8635; f) 12005.

В завершение этого пункта приведём доказательство признака делимости на 5, которое является почти дословным повторением доказательства признака делимости на 2.

Пусть $L = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$, где a_i – цифры, $i = 0, 1, 2 \ldots n$.
Тогда число L делится на 5, если цифра a_0 равна 0 или 5.

Доказательство

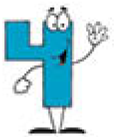
Число 565 можно записать как $565 = 56 \cdot 10 + 5$; число $890 = 89 \cdot 10 + 0$ и т. п.

В общем виде мы можем записать любое число L в виде

$$L = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1} \cdot 10 + \overline{a_0} \quad (2)$$

Из пункта **a** теоремы **1** следует, что первое слагаемое в правой части равенства (2) делится на 5, так как 10 делится на 5. Следовательно, из пункта **b** теоремы **1**, число L всегда делится на 5, если на 5 делится второе слагаемое в правой части равенства (2) – цифра $\overline{a_0}$ – то есть если цифра $\overline{a_0}$ равна 0 или 5.

8.7. Делимость на 4 и на 25



Число 100 делится на 25 и на 4.

Это наблюдение позволяет сформулировать и доказать **признаки делимости на 4 и на 25**.

Пусть $M = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$, где a_i – цифры, $i = 0, 1, 2 \ldots n$.

1) Тогда число M делится на 4, если на 4 делится число, составленное из **двух** последних цифр числа M: $\overline{a_1 a_0}$.

2) Тогда число M делится на 25, если на 25 делится число, составленное из **двух** последних цифр числа M: $\overline{a_1 a_0}$.

Доказательство

Число M можно записать:

$$M = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2} \cdot 100 + \overline{a_1 a_0} \quad (3)$$

Так как число 100 делится на число 25 и на число 4, из пункта **a** теоремы **1** следует, что первое слагаемое в правой части равенства (3) делится на число 25 и на число 4. Следовательно, из пункта **b** теоремы **1** следует, что число M делится на 4, если на 4 делится второе слагаемое в правой части равенства (3) – число $\overline{a_1 a_0}$, а также, что число M делится на 25, если на 25 делится второе слагаемое в правой части равенства (3) – число $\overline{a_1 a_0}$.

Задача

1) Знайка объясняет своим друзьям делимость и говорит, что 16 делится на 2, потому что 6 делится на 2; число 375 делится на 5, потому что 5 делится на 5. Далее, он говорит: «Число 618...» – и тут встревает Незнайка и продолжает: «618 делится на 4, потому что 8 делится на 2». Прав ли Незнайка?

2) Могут ли четыре торговки поровну поделить:

a) 27 837; b) 1528; c) 9314; d) 55 244 яйца?

3) Порция мороженого стоит 25 сомов. Может ли стоимость некоторого количества порций быть равной:

a) 29 817; b) 8 124 675; c) 35 673 215; d) 55 915 350 сомов?

Решение

1) Можно разделить 618 на 4 и убедиться в том, что получается 154,5. А как мы договаривались в начале параграфа, мы говорим, что одно число делится на другое, если в результате получается целое число.

В том, что Незнайка не прав, проще убедиться, воспользовавшись признаком деления на 4. Число, составленное из двух последних цифр числа 618 – число 18 – не делится на 4. Поэтому исходное число 618 не делится на 4.

2) Торговки могут поровну поделить яйца, если соответствующие числа делятся на 4. Чтобы проверить это, можно честно и мужественно делить приведённые числа на 4, а можно поступить проще: воспользоваться признаком деления на 4. Давайте так и поступим.

a) Число 27 837 не делится на 4, потому что на 4 не делится число 37;

b) Число 1528 делится на 4, потому что на 4 делится число 28;

c) Число 9314 не делится на 4, потому что на 4 не делится число 14;

d) Число 55 244 делится на 4, потому что на 4 делится число 44.

Итак, мы определили, что торговки смогут поровну поделить яйца в случаях b и d и не смогут поделить их в случаях a и c.

3) Порция мороженого стоит 25 сомов. Поэтому стоимость некоторого количества порций должна быть кратной 25 – должна делиться на 25. Осталось воспользоваться признаком делимости на 25.

a) Число 29 817 не делится на 25, потому что на 25 не делится число 17.

b) Число 8 124 675 делится на 25, потому что на 25 делится число 75.

c) Число 35 673 215 не делится на 25, потому что на 25 не делится число 15.

d) Число 55 915 350 делится на 25, потому что на 25 делится число 50.

Следовательно, стоимость некоторого количества мороженого может быть равна 8124675 и 55915350 и не может быть равна 29817 и 35673215.

218. Делится ли на 4 число:

a) 29818; b) 812462; c) 356732152; d) 55915380?

219. Делится ли на 25 число:

a) 140; b) 32425; c) 20185; d) 376300?

220. При каких значениях *x* число $\overline{52x4}$ делится на 4?

221. При каких значениях *y* число $\overline{49y5}$ делится на 25?

222. Делится ли на 4 число:

a) 2174; b) 84676; c) 33210; d) 555392?

223. Делится ли на 25 число:

a) 2 273 750; b) 8 473 275; c) 3 889 865; d) 576 455?

224. При каких значениях x число $\overline{337x}$ делится на 4?

225. При каких значениях y число $\overline{4827y}$ делится на 25?

8.8. Делимость на 3 и на 9

Задача

Можно ли разделить на 3 равные части:
a) 500 граммов; b) 550 граммов; c) 555 граммов?

Решение

На первый и второй вопросы ответ – НЕТ, на третий – ДА.

a) Для подтверждения запишем число 500 в виде
$500 = 5 \cdot 100 = 5(99 + 1) = 5 \cdot 99 + 5.$

Первое слагаемое делится на 3, потому что 99 делится на 3; второе, равное 5, нет. Поэтому сумма не делится на 3.

b) Подобное рассуждение приведём и для числа 550:
$550 = 5 \cdot 100 + 5 \cdot 10 = 5(99 + 1) + 5(9 + 1).$
Раскроем скобки: $5 \cdot 99 + 5 + 5 \cdot 9 + 5.$
Перегруппируем и получим:
$550 = 5 \cdot 99 + 5 \cdot 9 + 5 + 5 = (5 \cdot 99 + 5 \cdot 9) + 10.$

Как и в случае с числом 500, видим, что первое слагаемое делится на 3, потому что 99 и 9 делятся на 3; второе, равное 10, на 3 не делится. Поэтому сумма не делится на 3.

c) Применим такое же рассуждение для числа 555:
$555 = 5 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 5 = 5(99 + 1) + 5(9 + 1) + 5.$
Раскроем скобки: $5 \cdot 99 + 5 + 5 \cdot 9 + 5 + 5.$
Перегруппируем и получим:
$555 = (5 \cdot 99 + 5 \cdot 9) + 15.$

Первое слагаемое делится на 3, потому что 99 и 9 делятся на 3; второе, равное 15, также делится на 3. Следовательно, число 555 делится на 3.

Чтобы в дальнейшем иметь возможность легко находить ответы на подобные вопросы, обобщим вышеприведённое рассуждение.

Признак делимости на 3

Пусть $T = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$, где a_i – цифры, $i = 0, 1, 2 \ldots n$.

Тогда число T делится на 3, если на 3 делится $\overline{a_n} + \overline{a_{n-1}} + \overline{\ldots} + \overline{a_2} + \overline{a_1} + \overline{a_0}$ – сумма всех цифр, с помощью которых записано число T.

Если сумма цифр числа не делится на 3, то и само это число не делится на 3.

Доказательство

Число T можно записать в виде
$T = \overline{a_n} \cdot 10\ldots0 + \overline{a_{n-1}} \cdot 10\ldots0 + \overline{\ldots} + a_2 \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_0$.
Выделим в каждом слагаемом единичку:
$T = \overline{a_n}(9\ldots99 + 1) + \overline{a_{n-1}}(9\ldots9 + 1) + \overline{\ldots} + a_2(99 + 1) + a_1(9 + 1) + a_0$,
и перегруппируем:
$T = \{\overline{a_n} \cdot 9\ldots99 + \overline{a_{n-1}} \cdot 9 \ldots 9 + \overline{\ldots} + a_2 \cdot 99 + a_1 \cdot 9\} +$
$+ [\overline{a_n} + \overline{a_{n-1}} + \overline{\ldots} + \overline{a_2} + \overline{a_1} + \overline{a_0}]$.

Все слагаемые внутри фигурных скобок имеют множитель 9 и делятся на 3. Поэтому число T делится на 3, если на 3 делится сумма, заключённая в квадратные скобки.

Почти дословно повторив доказательство признака делимости на 3, получим **признак делимости на 9**:

Число делится на 9, если на 9 делится сумма всех цифр, с помощью которых записано это число.

Если сумма цифр числа не делится на 9, то и само это число не делится на 9.

226. Делится ли на 3 число:

a) 164; b) 642; c) 7 322 217; d) 9 153 841?

227. Делится ли на 9 число:

a) 734 376; b) 342 279; c) 8 119 161; d) 457 325?

228. Делится ли на 3 число:

a) 814; b) 462; c) 3 673 215; d) 5 591 538?

229. Делится ли на 9 число:

a) 227 376; b) 47 327; c) 388 916; d) 211 455?

8.9. Использование признаков делимости на 3 и 9

Задача

1) При каких значениях x число $\overline{21x736912}$ делится на 3?
2) При каких значениях y число $\overline{225y8y}$ делится на 9?

Решение

1) Целое число делится на 3, если сумма цифр, которыми записано это число, делится на 3. При этом нетрудно понять, что цифры 3, 6, 9, которые делятся на 3, при подсчёте суммы можно не учитывать. Итак, нужно, чтобы число $2 + 1 + x + 7 + 1 + 2 = 13 + x$ делилось на 3.

Ближайшее такое число – 15 – получится при $x = 2$. Далее, нужно брать значения x с шагом **три**: $x = 5$, $x = 8$. На этом останавливаемся, потому что следующее значение $x = 11$ цифрой не является.

Ответ: число $\overline{21x736912}$ делится на 3 при $x = 2; 5; 8$.

2) Целое число делится на 9, если сумма цифр, которыми записано это число, делится на 9.

То есть нужно, чтобы число $2 + 2 + 5 + y + 8 + y = 17 + 2y$ делилось на 9.

Следующее после 17 число, которое делится на 9, это 18. Но тогда $2y = 1$ и, следовательно, $y = 0{,}5$. Так как y является цифрой, такое значение y не допустимо. Рассматриваем следующее возможное число: 27. В этом случае $17 + 2y = 27$; $2y = 10$; $y = 5$.

Число 36 не годится по двум причинам, так как

$17 + 2y = 36$; $2y = 19$; $y = 9{,}5$.

По условию y, являясь цифрой, не может быть больше 9, а также не может быть нецелым числом. Последующие числа 45, 54... не подходят, так как и в этих случаях значения y будут больше 9.

Ответ: число $\overline{225y8y}$ делится на 9 при $y = 5$.

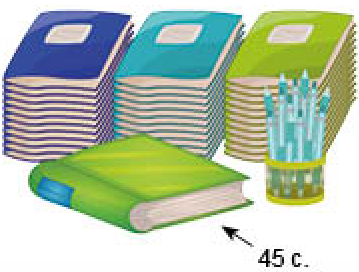
230. При каких значениях x число $\overline{37x871}$ делится на 3?

231. При каких значениях y число $\overline{y5y7y}$ делится на 9?

232. При каких значениях x число $\overline{x7}$ делится на 3?

233. При каких значениях y число $\overline{4y3y}$ делится на 9?

8.10. Ошибка при определении делимости



Задача

Знайка купил 33 тетради, 12 ручек и несколько книжек. Каждая книжка стоила 45 сомов. Когда продавец предложил заплатить за покупки 349 сомов, Знайка попросил его пересчитать, заявив, что имеет место ошибка. Как объяснил свою просьбу Знайка?

Услышав объяснение, стоявший рядом Незнайка сказал, что о наличии ошибки можно было догадаться проще. Всего куплено тетрадей и ручек 45 штук. Каждая книга стоит 45 сомов. Поэтому стоимость покупки должна быть числом, кратным 45. Прав ли Незнайка? В каком случае он был бы прав?

Решение

Знайка должен заплатить $33x + 12y + 45z$ сомов. Каждое слагаемое в этой сумме делится на 3, поэтому и сумма должна делиться на 3. Сумма цифр числа 349, названного продавцом, не делится на 3, то есть имеет место ошибка.

Стоимость покупки не обязательно будет кратна 45, то есть не обязательно будет делиться на 45. Например, если цена ручки равна 10 сомов, цена тетради равна 5 сомов и куплены две книжки, то стоимость покупки будет $33 \cdot 5 + 12 \cdot 10 + 45 \cdot 2 = 165 + 120 + 90 = 375$ сомов.

Попытавшись разделить это число на 45, убедимся, что получается дробное число. Незнайка был бы прав, если бы цена ручки была равна цене тетради, то есть $x = y$.

Тогда $33x + 12y + 45z = (33 + 12)\,y + 45z = 45\,(y + z)$.

234. Незнайка утверждает, что сумма 67 + 8212 не делится на 9, потому что первое слагаемое не делится на 9. Прав ли Незнайка?

235. При каких значениях a сумма $\overline{52a} + 112$ делится на 3?

236. При каких значениях b сумма $\overline{b152} + 217$ делится на 9?

237. При каких значениях c сумма $\overline{35c4} + 802$ делится на 3?

8.11. Использование признаков делимости на 9 и 4

Задача

Найдите наименьшее натуральное число вида $\overline{723X43Y}$, которое делится на: 1) 9; 2) 36.

Решение

Сумма цифр этого числа равна $7 + 2 + 3 + X + 4 + 3 + Y = 19 + X + Y$.

1) Чтобы число делилось на 9, сумма его цифр должна быть кратной 9. Следующее за 19 целое число, которое делится на 9, это число 27. Поэтому наименьшее значение $X + Y$, при котором число $19 + X + Y$ делится на 9, равно 8.

Так как мы ищем наименьшее число, то необходимо взять $X = 0$, $Y = 8$.

Ответ: искомое число равно 7230438.

2) Так как $36 = 9 \cdot 4$, число делится на 36, если оно делится и на 9, и на 4. В первом пункте выяснилось, что при $X + Y = 8$ число делится на 9. К сожалению, число 7230438 не делится на 4, так как 38 не делится на 4. Поэтому нам нужно выбрать цифру Y так, чтобы число $\overline{3Y}$ делилось на 4. При этом из двух возможных значений $Y = 2$ и $Y = 6$ нужно взять наибольшее значение Y. Тогда значение $X = 8 - 6 = 2$ и, соответственно, значение искомого числа $\overline{723X43Y}$ будет наименьшим.

Ответ: искомое число равно 7232436.

238. Найдите наименьшее натуральное число вида $\overline{253X543Y}$, которое делится на: a) 3; b) 15.

239. Найдите наименьшее натуральное число вида $\overline{234X4567Y}$, которое делится на: a) 9; b) 75.

8.12. Использование признаков делимости на 9, 5 и 25

Задача

Найдите наибольшее натуральное число вида $\overline{23X43Y}$, которое делится на: 1) 9; 2) 45; 3) 225.

Решение

Сумма цифр этого числа: $2 + 3 + X + 4 + 3 + Y = 12 + X + Y$.

1) Чтобы число делилось на 9, сумма его цифр должна быть кратной 9.

Так как мы ищем наибольшее число, в качестве $12 + X + Y$ нам нужно взять наибольшее число, которое делится на 9 и не превосходит $12 + (9 + 9) = 30$.

Слагаемое $(9 + 9)$ определяется тем, что X и Y в выражении $12 + X + Y$, являются цифрами, и их максимально возможное значение не превосходит 9. Это число 27. Поэтому наибольшее значение $X + Y$, при котором число $12 + X + Y$ делится на 9, равно 15. Так как мы ищем наибольшее число, то необходимо взять наибольшее возможное значение X. Поэтому $X = 9$; $Y = 6$.

Ответ: искомое число равно 239436.

2) Так как $45 = 9 \cdot 5$, то число делится на 45, если оно делится и на 9, и на 5. В первом пункте выяснилось, что наибольшее нужное число, делящееся на 9, получится, если взять $X + Y = 15$. Как известно, число делится на 5, если оно заканчивается на 0 или 5, то есть Y должен быть равен 0 или 5. Тогда X будет равен 15 или 10, что невозможно, так как X является цифрой.

Придётся уменьшить значение $X + Y$. Следующее перед 27 значение выражения $12 + X + Y$, которое делится на 9, это число 18. Тогда $X + Y = 6$.

Для Y из двух возможных значений 0 и 5 берём поменьше, тогда X и всё искомое число будет побольше: $X = 6$.

Ответ: искомое число равно 236430.

3) Так как $225 = 9 \cdot 25$, число делится на 225, если оно делится и на 9, и на 25. Но число, составленное из двух последних цифр искомого числа $\overline{3Y}$, ни при каком значении Y на 25 не делится. Следовательно, ни при каких значениях X и Y число $\overline{23X43Y}$ на 225 не делится.

240. Найдите наибольшее натуральное число вида $\overline{23X43Y}$, которое делится на: a) 3; b) 15; c) 75.

241. Найдите наибольшее натуральное число вида $\overline{234X4567Y}$, которое делится на: a) 9; b) 18; c) 36.

242. Сочините две задачи, подобные задачам, рассмотренным в данном параграфе.

Признаки делимости

1. Признак делимости на 10

Натуральное число делится на 10, если его запись заканчивается цифрой 0.

Если запись натурального числа заканчивается другой цифрой, то оно не делится без остатка на 10. Остаток в этом случае равен последней цифре числа.

2. Признак делимости на 2

Натуральное число делится на 2, если его запись заканчивается или цифрой 0, или цифрой 2, или цифрой 4, или цифрой 6, или цифрой 8.

3. Признак делимости на 5

Натуральное число делится на 5, если его запись заканчивается или цифрой 0, или цифрой 5.

4. Признак делимости на 3

Число делится на 3, если на 3 делится сумма всех цифр, с помощью которых записано это число.

5. Признак делимости на 9

Число делится на 9, если на 9 делится сумма всех цифр, с помощью которых записано это число.

6. Признак делимости на 25

Пусть $M = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$, где a_i – цифры, $i = 0, 1, 2 \ldots n$.

Тогда число M делится на 25, если на 25 делится число, составленное из **двух** последних цифр числа M: $\overline{a_1 a_0}$.

7. Признак делимости на 4

Пусть $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$, где a_i – цифры, $i = 0, 1, 2 \ldots n$.

Тогда число N делится на 4, если на 4 делится число, составленное из **двух** последних цифр числа N: $\overline{a_1 a_0}$.

1. Определите возраст прабабушки Эрбола, зная, что это чётное двузначное число с суммой цифр 16.

2. Определите возраст прадедушки Бекбола, зная, что это нечётное двузначное число с суммой цифр 17.

3. Определите возраст Джаныбека, зная, что это нечётное двузначное число с суммой цифр 2.

4. Определите возраст Айдай, зная, что это нечётное двузначное число с суммой цифр 3.

5. Показать, что:

a) число 217 делится на 7;
b) число 1616 делится на 16;
c) число 62 031 делится на 31;
d) число 54 270 делится на 27;
e) число 860 043 делится на 43;
f) число 182 091 делится на 91.

6. Определите, каким числом – чётным или нечётным – является результат вычисления.

a) $26 \cdot 9 + 72$
b) $33 \cdot 92 - 93$
c) $173 \cdot 51 - 15 \cdot 32$
d) $63 \cdot 27 - 39 \cdot 73 - 22$
e) $64 + 42 \cdot 15 - 23$
f) $83 \cdot 35 - 481 + 43 \cdot 9$

7. Два телёнка, Пёстрик и Черныш, вырастили много кукурузы и начали её делить. Они договорились, что будут по очереди брать по 19 початков кукурузы. Первым взял Пёстрик, потом Черныш, затем Пёстрик и так далее. Кто взял последние початки, если всего было выращено: a) 323; b) 621; c) 455; d) 400 початков?

Сколько початков досталось Пёстрику, сколько – Чернушке?

8. Четыре подруги купили: a) 2784; b) 1526; c) 9314; d) 5232 яйца.

Смогут ли они разделить их поровну?

9. Порция мороженого стоит 9 сомов. Может ли стоимость некоторого количества порций быть равной: a) 29 817; b) 12 675; c) 56214; d) 91 550 сомов?

10. При каких значениях x число $\overline{37x71}$ делится на 3?

11. При каких значениях y число $\overline{y15y7}$ делится на 9?

12. При каких значениях a число $\overline{a3}$ делится на 4?

13. При каких значениях b число $\overline{4bb3b}$ делится на 9?

14. При каких значениях c число $\overline{37c87c}$ делится на 25?

15. При каких значениях y число $\overline{4y7y}$ делится на 15?

16. При каких значениях x число $\overline{2x7x}$ делится на 6?

17. При каких значениях z число $\overline{4z5z}$ делится на 12?

18. При каких значениях a сумма $\overline{5a4}$ + 102 делится на 6?

19. При каких значениях b сумма $\overline{b523}$ + 421 делится на 36?

20. При каких значениях c сумма $\overline{435c}$ + 152 делится на 12?

21. Найдите наименьшее натуральное число вида $\overline{3X54Y}$, которое делится на: a) 3; b) 15; c) 36.

22. Найдите наибольшее натуральное число вида $\overline{24X45Y}$, которое делится на: a) 9; b) 18; c) 15.

23. Найдите наибольшее натуральное число вида $\overline{423X6Y}$, которое делится на 5.

24. Отчитываясь за покупку стульев, Киса Воробьянинов предъявил чек, на котором остались только две последние цифры: ...85. На месте остальных стояла большая клякса. Он сообщил, что за каждый стул было заплачено по 25 рублей. Прав ли был Остап Бендер, наказав Кису?

25. Хулиган Вася вырвал из разных мест книги 27 листов и сложил номера всех вырванных 54 страниц. У него получилось 2014. Докажите, что Вася ошибся.

§ 9. Разложение натуральных чисел на множители. НОК

9.1. Простые и составные числа

Любое число n можно записать в виде $n = km$, взяв в качестве k и m само число n и 1.

Например, $24 = 24 \cdot 1$; $17 = 17 \cdot 1$.

Но числа 24 и 17 имеют существенное различие:
число 24 делится на два: $24 = 2 \cdot 12$;
на три: $24 = 3 \cdot 8$;
на четыре: $24 = 4 \cdot 6$;
на шесть: $24 = 4 \cdot 6$ и т. д.,
в то время как число 17 делится только на себя и 1.

> Натуральное число называется простым, если оно имеет только два делителя: 1 и само это число. Натуральное число называется составным, если оно имеет более двух делителей.
>
> Число 1 имеет только один делитель: само это число. Поэтому его не относят ни к простым, ни к составным.

Или, проще говоря:

> Натуральные числа, которые делятся только на себя и 1, называются **простыми**, остальные, кроме 1, **составными**.
>
> Число 1, играющее при умножении ту же роль, что и 0 при сложении (не меняет число), ни к простым, ни к составным не относится.

Например, группа из 12 приятелей может разделиться на 2; 3; 4; 6 и 12 равных частей по числу игроков футбольной команды и провести турнир – число 12 является составным.

Если же приятелей 7, то они могут разделиться на команды с равным числом игроков только в случае, когда команда будет состоять из одного игрока, потому что число 7 – простое.

Один мальчик на команды разделиться не может – число 1 ни простым, ни составным не является.

243. Является ли простым число:

a) 4; b) 11; c) 3; d) 7; e) 41; f) 16?

244. Является ли составным число:

a) 42; b) 14; c) 31; d) 17; e) 21; f) 81?

9.2. Решето Эратосфена

Простые числа играют большую роль в математике. Поэтому очень важно различать простые и составные числа, а в тех случаях, когда рассматриваются большие числа, это может оказаться весьма непросто. Например, число 65 537 – простое, а число 12 091 – составное.

Изучением простых чисел занимается отрасль математики, называемая «Теория чисел». Те из вас, кто захотят стать профессиональными математиками, будут изучать эту дисциплину в университете.

Чтобы доказать, что данное натуральное число является простым, нужно показать, что оно не делится на другие натуральные числа. Удобный метод отыскания простых чисел связан с именем древнегреческого математика Эратосфена, который жил в III веке до нашей эры.

Выпишем подряд натуральные числа, начиная с двойки: 2, 3, 4, 5, 6…

Число 1 не рассматриваем, так как уже было сказано: 1 не является ни составным, ни простым числом. Число 2 – простое. Каждое второе из следующих чисел делится на 2 и является составным. Подчеркнём эти числа:

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20…

Следующее за простым числом 2 неподчёркнутое число – это 3. Оно тоже простое. Далее, каждое третье за ним число делится на 3. Поэтому так же, как и раньше, подчеркнём эти числа:

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26…

Итак, мы подчеркнули числа, делящиеся на 3. Стоит отметить, что часть этих чисел, такие как 6, 12, 18…, уже были подчёркнуты, так как они делятся на 2.

На следующем шаге делаем то же самое: берём первое неподчёркнутое число. Это число 5. Затем подчёркиваем каждое пятое число – они делятся на 5:

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26…

Так как многие числа уже подчёркнуты, на этот раз первым подчёркнутым числом будет 25.

Продолжая этот процесс, видим, что следующим простым числом будет 7, затем 11…

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

В результате мы «просеиваем» множество натуральных чисел, подчёркивая составные числа и оставляя простые. Этот способ называется **«Решето Эратосфена»**.

245. Используйте «Решето Эратосфена» и выпишите все простые числа, не превосходящие число 40.

246. Используйте «Решето Эратосфена» и выпишите все простые числа, не превосходящие число 50.

9.3. Разложение на простые множители

Любое составное число можно разложить на два множителя, каждое из которых больше 1. Простое число так разложить на множители нельзя. Любое составное число можно разложить на простые множители. При любом способе получается одно и то же разложение, если не учитывать порядка записи множителей.

Задача

Разложите на простые множители число: a) 5; b) 22; c) 258; d) 120; e) 108; f) 9300.

Решение

a) Число 5 является простым и поэтому других простых множителей у него нет.

b) Число 22 является чётным, то есть его можно без остатка поделить на два: $22 : 2 = 11$. Результат деления, число 11, является простым, и поэтому процесс разложения на простые множители на этом заканчивается.
Следовательно, $22 = 2 \cdot 11$.

c) Число 258 является чётным, то есть его можно без остатка поделить на 2: $258 : 2 = 129$. Результат деления, число 129, можно разделить на 3, потому что сумма цифр, использованных при записи этого числа: $1 + 2 + 9 = 12$, делится на 3. Разделим $129 : 3 = 43$. В частном получилось простое число 43, поэтому процесс на этом заканчиваем.
Следовательно, $258 = 2 \cdot 3 \cdot 43$.

d) Так как число 120 – чётное, $120 : 2 = 60$. Результат деления – также чётное число. Поэтому $60 : 2 = 30$. И в третий раз поделив на два, получим $30 : 2 = 15$. Это число заканчивается на 5 и поэтому делится на пять $15 : 5 = 3$. Процесс закончен.
Следовательно, $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3$.

e) Число 108 можно два раза разделить на 2: $108 : 2 = 54$; $54 : 2 = 27$.
Сумма цифр числа 27 делится на 3 – разделим 27 на 3: $27 : 3 = 9$.
Разделив на 3 ещё раз, получим требуемое разложение:
$108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$.

f) Чтобы получить разложение числа 9300, можно действовать следующим образом. Понятно, что 9300 делится на 100: $9300 = 100 \cdot 93$.

Число 100 представляется в виде $100 = 10 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$, а число 93 в виде $93 = 3 \cdot 31$.

Следовательно, исходное число 9300 записывается в виде произведения простых множителей следующим образом:

$9300 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 31$.

247. Разложите на простые множители число:

a) 35; b) 14; c) 66; d) 242; e) 36; f) 9000.

248. Разложите на простые множители число:

a) 17; b) 24; c) 98; d) 250; e) 111; f) 10 000.

9.4. Одно числовое данное является множителем другого

Задача

Аскар может съесть маленький торт за 20 минут, Акмарал – за 1 час.

За сколько времени они могут съесть этот торт вместе?

Решение

Можно говорить о том, что, взявшись за торт вдвоём, они начнут торопиться, чтобы съесть побольше, но мы знаем, что они очень хорошо воспитаны, поэтому будут есть с той же скоростью, что и раньше.

Ответ легко получить, сообразив, что за один час, то есть за 60 минут, сохраняя скорость, Аскар мог бы съесть 3 торта. Следовательно, вдвоём они могли бы съесть 4 торта за 60 минут или 1 торт за $60 : 4 = 15$ минут.

249. Джибек может съесть килограмм шоколадных конфет за 2 часа, Роман – за 30 минут. За сколько времени они могут съесть конфеты вместе?

250. Джамиля может прополоть грядку за 3 часа, Ася – за 6 часов. За сколько часов они прополют грядку, работая вместе?

9.5. НОК

В предыдущем пункте нам удалось достаточно легко решить задачу с тортом, потому что число 20 является множителем числа 60. А как решить подобную задачу, если, например, вместо числа 20 будет стоять число 40 или число 55?

Чтобы ответить на подобные вопросы, введём понятие «общее кратное».

Кратным натурального числа *a* называется натуральное число, которое делится без остатка на число *a*.

Любое натуральное число имеет бесконечно много кратных. Наименьшим из кратных натурального числа является само это число. Слова **делится (без остатка)** и **кратно** заменяют друг друга.

Общим кратным нескольких чисел называется число, являющееся кратным для каждого из них. Другими словами, число, которое делится на каждое из них.

Например, число 900 является общим кратным для чисел 15, 6, 10. Числа 180 и 90 также являются общим кратным для чисел 15, 6, 10.

Среди общих кратных имеется наименьшее число. Оно называется **наименьшим общим кратным** и обозначается **НОК**. Запись НОК (15; 6; 10) = 30 означает, что наименьшее общее кратное для чисел 15, 6, 10 равно 30.

НОК используется в качестве наименьшего общего знаменателя при вычислении суммы или разности нескольких обыкновенных дробей (см., например, задачу из п. 11.4 – стр. 141).

Задача

Вычислите НОК для чисел:

a) 3 и 5; b) 7 и 35; c) 45 и 30; d) 8 и 20; e) 252 и 441; f) 6; 8 и 22.

Решение

Существуют разные способы вычисления наименьшего общего кратного для двух чисел. Мы предлагаем использовать следующий способ.

Пусть даны натуральные числа *A* и *B*, причём *A* меньше *B*. Разложим *A* на простые множители и затем будем последовательно делить *B* на те из полученных множителей, которые являются множителями *A*. Частное умножим на число *A*. Полученное произведение будет НОК для чисел *A* и *B*.

a) Число 3 является простым, поэтому его разложение 3 = 3. Так как и число 5 является простым, оно не делится ни на какое число, в частности на 3. Поэтому НОК (3; 5) = $3 \cdot 5 = 15$.

Как было указано ранее, эта запись означает, что наименьшее общее кратное чисел 3 и 5 равно 15.

b) Число 7 является простым, поэтому его разложение 7 = 7. Число 7 делится на 7, и 35 : 7 = 5. Поэтому НОК (7; 35) = $7 \cdot 5 = 35$.

c) Берём меньшее из чисел 45 и 30 и раскладываем на простые множители: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Так как 45 делится и на 3, и на 5, последовательно делим на эти числа: 45 : 3 = 15; 15 : 5 = 3.

Частное от деления – число 3 – умножаем на 30 и получаем
НОК (30; 45) = 3 · 30 = 90.

d) Раскладываем на простые множители число 8: 8 = 2 · 2 · 2. Делим число 20 на 2: 20 : 2 = 10.

Понятно, что результат можно разделить на второй множитель, тоже двойку: 10 : 2 = 5.

Так как частное – число 5 – на третий множитель, опять же двойку, не делится, процесс завершён.

Следовательно, НОК (8; 20) = 8 · 5 = 40.

e) Разделив число 252 на двойку два раза, получим: 252 : 2 = 126; 126 : 2 = 63.

Число 63 делится на три: 63 : 3 = 21, число 21 тоже: 21 : 3 = 7.

Так как число 7 – простое, процесс разложения завершён:
252 = 2 · 2 · 3 · 3 · 7.

Число 441 является нечётным и на 2 не делится. Так как сумма его цифр делится на 3, оно делится на три: 441 : 3 = 147.

Число 147 можно разделить на вторую тройку из разложения: 147 : 3 = 49.

И, наконец, число 49 делится на последний множитель из разложения – на число 7: 49 : 7 = 7.

Итак, в частном получилось 7.

Следовательно, НОК (252; 441) = 252 · 7 = 1764.

f) НОК для нескольких чисел можно найти путём последовательного вычисления: то есть сначала найти НОК для двух чисел, затем найти НОК для третьего числа и НОК, найденного на первом этапе, и так далее.

Итак, чтобы найти НОК для чисел 6; 8 и 22, сначала найдём НОК для чисел 6 и 8. Так как 6 = 2 · 3, делим число 8 на 2: 8 : 2 = 4.

Так как частное – число 4 – на тройку не делится, процесс завершён.

Следовательно, НОК (6; 8) = 6 · 4 = 24.

Теперь найдём НОК для чисел 24 и 22.

Так как 22 = 2 · 11, делим число 24 на 2: 24 : 2 = 12, и на этом процесс завершён.

Следовательно, НОК (22; 24) = 22 · 12 = 264.

В то же время это число будет НОК для чисел 6; 8 и 22:
НОК (6; 8; 22) = 264.

251. Вычислить НОК для чисел:

a) 7 и 11; c) 42 и 28; e) 504 и 540;
b) 5 и 35; d) 75 и 50; f) 66; 78 и 42.

252. Вычислить НОК для чисел:

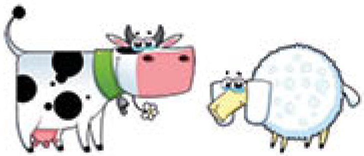
a) 13 и 5; c) 35 и 49; e) 4200 и 16 500;
b) 70 и 35; d) 24 и 60; f) 126; 182 и 42.

Важное замечание

Умение вычислять НОК является весьма важным, но не жизненно необходимым умением. Как правило, можно обойтись общим кратным, которое является произведением исходных чисел. Обычно, по сравнению с использованием НОК, это приводит к более громоздким вычислениям, но на правильность ответа не влияет.

9.6. Определение времени на совместную работу

Задача



Корова может съесть копну сена за 14 дней, овца – за 35 дней. За сколько дней могут съесть копну сена корова и овца вместе?

Решение

Вычислим наименьшее общее кратное чисел 14 и 35. Для этого возьмём меньшее из этих чисел и разложим на простые множители:

$14 = 2 \cdot 7$. Так как 35 делится на 7 и не делится на 2, разделим на семь: $35 : 7 = 5$. Частное от деления – число 5 – умножаем на 14 и получаем НОК $(14; 35) = 5 \cdot 14 = 70$.

То, что $70 : 14 = 5$; $70 : 35 = 2$, означает, что за 70 дней овца может съесть 5 копён сена, а корова – 2 копны. Итак, за 70 дней корова и овца вместе съедят $5 + 2 = 7$ копён сена, или, другими словами, одну копну за 10 дней, потому что $70 : 7 = 10$.

253. Кристина может съесть плов за 21 минуту, Рахат – за 24 минуты. За сколько времени они могут съесть его вместе?

254. Бактыгуль может собрать ящик яблок за 36 минут, Станислав – за 24 минуты. За сколько минут они соберут ящик яблок, работая вместе?

9.7. Определение частного времени по заданному времени совместной работы

Задача

На птицеферму привезли тонну корма. Уткам и гусям его хватит на 27 дней. Если бы этот корм давали только гусям, то его бы хватило на 45 дней. На сколько дней хватит тонны корма уткам?

Решение

Чтобы вычислить наименьшее общее кратное чисел 27 и 45, разложим меньшее из этих чисел на простые множители: $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$.

Так как 45 делится на 9 (два раза на 3), делим на девять: 45 : 9 = 5.

Частное от деления – число 5 – умножаем на 27 и получаем НОК (27; 45) = 5 · 27 = 135.

То, что 135 : 27 = 5, означает, что за 135 дней утки и гуси вместе съедят 5 тонн корма, а то, что 135 : 45 = 3, означает, что за 135 дней гуси съедят 3 тонны корма. Следовательно, за 135 дней утки съедят 5 − 3 = 2 тонны корма, или, другими словами, одну тонну за 67,5 дней, потому что 135 : 2 = 67,5.

255. Марина и Гульназ, работая вместе, приготовили салат за 36 минут. За сколько часов может приготовить этот салат Гульназ, если Марине на это требуется 1 час?

256. Ислам и Мээрим съели пирог за 38 минут. За сколько минут может съесть пирог Мээрим, если Исламу на это требуется 57 минут?

9.8. Определение частного времени по части времени на совместную работу

Задача

Два класса, 6 «А» и 6 «Б», работая вместе, могут посадить картофель на школьном огороде за 8 часов. В первый день они проработали 6 часов, на второй день работал только 6 «Б» и закончил работу через 3 часа. За какое время 6 «А» класс мог бы посадить картофель на школьном огороде, работая отдельно?

Решение

Два класса проработали вместе 6 часов и выполнили 6 : 8 = 0,75 всей работы. Следовательно, 6 «Б» классу осталась четверть работы: 1 − 0,75 = 0,25. Её он выполнил за 3 часа. Поэтому всю работу 6 «Б» может выполнить за 3 : 0,25 = 12 часов. Теперь, когда нам известны общая «работа» и время одного «участника», нужно узнать время другого. Поэтому поступаем так же.

Находим наименьшее общее кратное чисел 8 и 12:

НОК (8; 12) = 8 · 3 = 24. То, что 24 : 8 = 3, означает, что за 24 часа два класса могли бы посадить картофель на трёх таких огородах.

24 : 12 = 2 означает, что за 24 часа 6 «Б» класс мог бы посадить картофель на двух таких огородах.

Следовательно, 6 «А» класс может посадить картофель на школьном огороде за 24 часа.

257. Мурат и Диля, работая вместе, могут сделать генеральную уборку квартиры за 6 часов. После того как они проработали 90 минут и Мурат под благовидным предлогом ушёл, Диля закончила уборку, проработав ещё 6 часов. За сколько часов может сделать генеральную уборку Мурат?

258. Два класса, 6 «А» и 6 «Б», работая вместе, могут собрать картофель со школьного огорода за 10 часов. В первый день они проработали 8 часов, на второй день работал только 6 «А» и закончил работу через 6 часов. За какое время 6 «Б» класс мог бы собрать картофель со школьного огорода, работая отдельно?

9.9. Задачи на совместную работу трёх субъектов

Задача

1) Рая может покрасить забор за 7 часов, Роза – за 12 часов, Болот – за 14 часов. За какое время они могут покрасить забор, работая вместе?

2) Работая вместе, первый и второй насосы могут откачать воду из бассейна за 1 час 10 минут. Эту же работу первый и третий насосы могут выполнить за 1 час 24 минуты, а второй и третий насосы – за 2 часа 20 минут. За какое время воду из бассейна могут откачать все три насоса, работая вместе?

Решение

1) Сначала вычислим наименьшее общее кратное чисел 7 и 12. Оно, как не трудно установить, равно 84. Затем вычислим наименьшее общее кратное чисел 84 и 14. Так как $14 = 2 \cdot 7$, а число 84 делится и на 2, и на 7, то НОК $(84; 14) = 6 \cdot 14 = 84$.

Итак, НОК чисел 7, 12 и 14 равно 84.

То, что $84 : 7 = 12$, означает, что Рая могла бы за 84 часа покрасить 12 таких заборов. Соответственно, то, что $84 : 12 = 7$, означает, что Роза могла бы за 84 часа покрасить 7 таких заборов, а то, что $84 : 14 = 6$, означает, что Болот мог бы за 84 часа покрасить 6 таких заборов.

Следовательно, Рая, Роза и Болот за 84 часа могли бы покрасить $12 + 7 + 6 = 25$ таких заборов. Тогда один забор они могут покрасить за $84 : 25 = 3{,}36$ часа.

2) Сначала переведём всё время в минуты:

1 час 10 минут = 70 минут;

1 час 24 минуты = 84 минуты;

2 часа 20 минут = 140 минут.

Затем вычислим наименьшее общее кратное чисел 70; 84 и 140. Для этого, как было предложено ранее, найдём НОК для 70 и 84, разложив 70 на множители:

$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$. Тогда НОК $(70; 84) = 6 \cdot 70 = 420$.

На следующем шаге вычислим НОК для 420 и 140, которое будет наименьшим общим кратным для исходной тройки чисел:

НОК (420; 140) = 3 · 140 = 420.

То, что 420 : 70 = 6, означает, что первый и второй насосы, работая вместе, могут откачать воду из шести таких бассейнов за 420 минут. Соответственно, то, что 420 : 84 = 5, означает, что первый и третий насосы, работая вместе, могут откачать воду из пяти таких бассейнов за 420 минут, а то, что 420 : 140 = 3, означает, что третий и второй насосы, работая вместе, могут откачать воду из трёх таких бассейнов за 420 минут.

Следовательно, 2 насоса первого типа, 2 насоса второго типа и 2 насоса третьего типа за 420 минут могут откачать воду из 6 + 5 + 3 = 14 бассейнов.

Следовательно, если будет работать по одному насосу каждого типа, то за 420 минут они могут откачать воду из 14 : 2 = 7 бассейнов, а воду из одного бассейна – за 60 минут, потому что 420 : 7 = 60.

259. Марат может подмести двор за 18 минут, Дима – за 13, а Карина – за 26. За сколько минут они могут подмести двор, работая вместе?

260. Филипп может перепечатать книгу за 6 дней, Азим – за 7 дней, а Асель – за 14 дней. За сколько дней они могут перепечатать книгу, работая вместе?

9.10. Определение совместной работы по парным данным

Задача

Работая вместе, Шаршенбек и Гульнара могут перевести текст за 7 часов, Гульнара и Батыр – за 12 часов, а если Гульнара, которая работает более тщательно, будет работать одна, то она закончит перевод за 28 часов. За какое время переведут текст все трое, работая вместе?

Решение

Вычислим наименьшее общее кратное чисел 7; 12 и 28. Для этого найдём НОК для 7 и 12:

НОК (7; 12) = 7 · 12 = 84. На следующем шаге вычислим НОК для 28 и 84, которое будет наименьшим общим кратным для исходной тройки чисел:

НОК (28; 84) = 3 · 28 = 84.

Так как 84 : 7 = 12 и 84 : 12 = 7, это означает, что Шаршенбек и Гульнара, а также Гульнара и Батыр, работая вместе, за 84 часа могут перевести 12 + 7 = 19 таких текстов. При этом Гульнара посчитана дважды. Поэтому она за 84 часа может перевести 84 : 28 = 3 текста, а работая втроём, они за 84 часа могут перевести 19 − 3 = 16 таких текстов.

Следовательно, работая вместе, они переведут текст за 84 : 16 = 5,25 часа.

261. Мама и папа могут приготовить обед за 24 минуты, папа и дочка – за 34 минуты. Если же обед будет готовить один папа, то ему понадобится 102 минуты. За сколько минут могут приготовить обед мама, папа и дочка втроём?

262. Дастан и Азат могут собрать ведро смородины за 22 минуты, Азат и Мээрим – за 27 минут. Работая отдельно, Азат может собрать ведро смородины за 66 минут. За какое время они соберут ведро смородины, работая вместе?

9.11. Определение частного времени по совместной работе троих

Задача

Работая вместе, Шайлоо, Аида и Атыр могут нарезать морковь для плова за 9 минут. Если эту работу будет выполнять один из них, то Аида может выполнить её за 22 минуты, Атыр – за 18 минут. За какое время может нарезать морковь Шайлоо?

Решение

Вычислим наименьшее общее кратное чисел 9; 22 и 18.

НОК для 9 и 22:

НОК (9; 22) = 9 · 22 = 198.

НОК для 18 и 198 будет наименьшим общим кратным для исходной тройки чисел. Так как 198 делится на 18, НОК (198; 18) = 198.

Работая вместе, за 198 минут они могут выполнить эту работу 198 : 9 = 22 раза.

При этом Аида может её выполнить 198 : 22 = 9 раз, Атыр 198 : 18 = 11 раз.

Итак, Шайлоо, за 198 минут может нарезать морковь 22 − (9 + 11) = 2 раза.

Отсюда получаем, что 1 раз он может нарезать морковь за 198 : 2 = 99 минут.

263. Мама, папа и Вася могут слепить снеговика за 12 минут. Папа, работая отдельно, – за 30 минут, мама – за 33 минуты. За сколько минут может слепить снеговика Вася?

264. Улар, Тынара и Сайкал могут собрать коробку абрикосов за 18 минут. Работая отдельно, Улар может это сделать за 45 минут, Тынара – за 60 минут. За сколько минут Сайкал может собрать коробку абрикосов?

9.12. Оптимизация момента замены

Задача

Шина на переднем колесе велосипеда приходит в негодность через 6300 *км* пробега, на заднем – через 4500 *км*. Айсулуу купила новый велосипед. Через сколько километров пробега ей нужно поменять местами задние и передние шины, чтобы они прослужили одинаково долго?

Решение

НОК (6300; 4500) = 31 500.

То, что 31 500 : 6300 = 5; 31 500 : 4500 = 7, означает, что последовательно используя 5 шин на переднем и 7 шин на заднем колесе, Айсулуу сможет проехать 31 500 *км*.

Так как 5 + 7 = 12, получается, что на 31 500 *км* нужно 6 пар шин. Соответственно, на одной паре шин можно проехать 31 500 : 6 = 5250 *км*. Чтобы шины служили одинаково долго, каждая шина половину пути должна быть на переднем колесе, половину – на заднем. Следовательно, шины нужно поменять местами через 5250 : 2 = 2625 *км*.

265. Шина на переднем колесе автомобиля приходит в негодность через 65 000 *км* пробега, на заднем – через 39 000 *км*. Через сколько километров пробега нужно поменять местами задние и передние шины, чтобы они прослужили одинаково долго?

266. Передние колёса роликовых коньков приходят в негодность через 300 *км* пробега, а задние – через 500 *км*. Бегайым подарили новые роликовые коньки. Через сколько километров пробега ей нужно поменять местами задние и передние колёса, чтобы они прослужили одинаково долго?

267. Сочините две задачи, подобные задачам, рассмотренным в данном параграфе.

1. Разложите на простые множители число:

a) 23; c) 88; e) 126;
b) 26; d) 96; f) 2100.

2. Джаннат может прополоть грядку за 3 часа, Зарина – за 12 часов. За сколько часов они прополют грядку, работая вместе?

3. Джаркынай может приготовить ужин за 40 минут, Алия – за 2 часа. За сколько часов они приготовят ужин вместе?

4. Вычислить НОК для чисел:

a) 3 и 17; c) 5 и 68; e) 2200 и 16 500;
b) 17 и 34; d) 28 и 70; f) 32; 48 и 44.

5. Индира может приготовить салат за 27 минут, Гульмира – за 48 минут. За сколько минут девушки, работая вместе, могут приготовить этот салат?

6. Таалай может съесть пиццу за 18 минут, Мария – за полчаса. За сколько минут они могут съесть пиццу вместе?

7. За пять недель пират Ерёма
Способен выпить бочку рома.
А у пирата у Емели,
Ушло б на это две недели.
За сколько дней прикончат ром
Пираты, действуя вдвоём?

8. Периза и Сабина, работая вместе, могут выткать ковёр за 36 дней. Периза, работая одна, может выткать ковёр за 63 дня. За сколько дней Сабина может выткать ковёр?

9. Бурул и Сапар могут собрать ящик клубники за 35 минут, Сапар, работая отдельно, – за 63 минуты. За сколько минут соберёт ящик клубники Бурул?

10. Малыш и Карлсон могут съесть банку варенья за 2 часа. После того как они съели $\frac{3}{4}$ банки, Малыш сел делать уроки, а Карлсон доел варенье за 40 минут. За сколько часов Малыш может съесть банку варенья?

11. Три класса, 6 «А», 6 «Б» и 6 «В», работая вместе, могут собрать яблоки в школьном саду за 14 часов. Если же будут работать только два класса, 6 «А» и 6 «Б», то им понадобится 18 часов. За какое время 6 «В» класс мог бы собрать яблоки в школьном саду, работая отдельно?

12. Работая по отдельности, первый насос может наполнить бассейн водой за 7 часов, второй насос – за 16 часов, а третий насос – за 56 часов. За какое время смогут наполнить бассейн все три насоса, работая вместе?

13. Первая голова Змея Горыныча может выпить бочку воды за 9 минут, вторая – за 8 минут, третья – за 24 минуты. За сколько минут была бы выпита бочка воды, если бы головы могли пить воду вместе?

14. Ира и Катя могут убрать дом за 33 минуты, Маша и Катя – за 44 минуты. Работая отдельно, Катя может закончить уборку за 66 минут. За какое время они могут убрать дом, работая вместе?

15. Три толстяка съели казан плова за 8 минут. Первый толстяк может съесть столько плова за 20 минут, второй – за 24 минуты. За сколько минут может съесть плов третий толстяк?

16. Шина на переднем колесе мотоцикла приходит в негодность через 9900 *км* пробега, на заднем – через 7700 *км*. Через сколько километров пробега нужно поменять местами задние и передние шины, чтобы они прослужили одинаково долго?

17. Первый насос может наполнить бассейн за 1 час, второй – за 2 часа. Хватит ли двум насосам 35 минут, чтобы наполнить бассейн?

18. Какую цифру нужно удалить из множества {1; 2; 3; ... 9}, чтобы НОК оставшихся было наименьшим?

§ 10. Равенство обыкновенных дробей. НОД

10.1. Равносильность дробей

Айсулуу, Тинатин и Настя пропололи картофельное поле. Тинатин прополола 8 рядов, Айсулуу и Настя – по 4 ряда. В благодарность за работу Юля купила им торт и сказала, что каждый должен получить кусок, соответствующий проделанной работе. Айсулуу сказала: «Было 16 рядов. Поэтому торт нужно поделить на 16 равных частей, а потом каждая из нас возьмёт столько кусков, сколько рядов она прополола». Ей ответила Тинатин: «Совсем не обязательно делить торт на 16 частей. Можно обойтись двумя разрезами». Согласны ли вы с Айсулуу? А с Тинатин?

Айсулуу права. Так как было прополото 16 рядов, то, если торт будет поделён на 16 частей и каждая девушка возьмёт столько кусочков, сколько рядов она прополола, это будет справедливо.

На языке математики это можно выразить с помощью обыкновенных дробей следующим образом:

Тинатин получит $\frac{8}{16}$ (восемь шестнадцатых) торта, Айсулуу и Настя получат по $\frac{4}{16}$ (четыре шестнадцатых) торта.

В то же время Тинатин тоже права. Прополов 8 рядов из 16, она выполнила половину всей работы. Поэтому торт можно поделить пополам и одну половинку отдать Тинатин. Так как Айсулуу и Настя проделали одинаковый объём работы, оставшуюся половинку нужно разделить на две четвертинки и отдать им.

На языке математики: Тинатин получит $\frac{1}{2}$ (одну вторую) торта, Айсулуу и Настя получат по $\frac{1}{4}$ (одной четвёртой) торта.

Рассмотренная ситуация, в которой используется тот факт, что $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, а $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, иллюстрирует следующее свойство обыкновенных дробей:

Задача

При каком значении x справедливо равенство:

a) $\frac{x}{10} = \frac{1}{2}$; c) $-\frac{2}{3} = \frac{8}{x}$; e) $\frac{x}{40} = 0{,}75$;

b) $\frac{3}{17} = \frac{9}{x}$; d) $\frac{1{,}1}{0{,}3} = \frac{x}{3{,}3}$; f) $-0{,}4 = \frac{2}{x}$?

Решение

a) $\frac{x}{10} = \frac{1}{2}$. Так как отношение знаменателей $10 : 2 = 5$, таким же должно быть и отношение числителей: $x : 1 = 5$.

Отсюда следует: $x = 5 \cdot 1 = 5$.

b) $\frac{3}{17} = \frac{9}{x}$. В этом случае отношение числителей 9 : 3 = 3. Поэтому соответствующее отношение знаменателей тоже должно равняться трём: $x : 17 = 3$.

Следовательно, $x = 3 \cdot 17 = 51$.

c) $-\frac{2}{3} = \frac{8}{x}$. Так как $8 : (-2) = -4$, имеет место равенство: $x : 3 = -4$. Отсюда следует: $x = -4 \cdot 3 = -12$.

d) $\frac{1,1}{0,3} = \frac{x}{3,3}$. Так как $3,3 : 0,3 = 11$, имеет место равенство: $x : 1,1 = 11$. Отсюда следует: $x = 11 \cdot 1,1 = 12,1$.

e) $\frac{x}{40} = 0,75$. Как говорилось ранее, запись 0,75 обозначает дробь $\frac{75}{100}$. То есть имеет место равенство: $\frac{x}{40} = \frac{75}{100}$.

Тогда, так как $40 : 100 = 0,4$, имеет место равенство: $x : 75 = 0,4$.

Отсюда следует: $x = 0,4 \cdot 75 = 30$.

f) $-0,4 = \frac{2}{x}$. Записав десятичную дробь как обыкновенную, получим $-\frac{4}{10} = \frac{2}{x}$. Тогда, так как $2 : (-4) = -0,5$, имеет место равенство: $x : 10 = -0,5$.

Отсюда следует: $x = -0,5 \cdot 10 = -5$.

268. При каком значении x справедливо равенство:

a) $\frac{x}{21} = \frac{3}{7}$; c) $-\frac{12}{13} = \frac{48}{x}$; e) $\frac{x}{24} = 0,25$;

b) $\frac{31}{72} = \frac{93}{x}$; d) $\frac{0,13}{0,23} = \frac{x}{2,99}$; f) $-0,8 = \frac{27}{x}$?

269. При каком значении x справедливо равенство:

a) $\frac{x}{96} = \frac{1}{6}$; c) $-\frac{12}{33} = -\frac{72}{x}$; e) $\frac{x}{34} = 0,55$;

b) $\frac{63}{70} = \frac{9}{x}$; d) $\frac{3,1}{0,3} = \frac{x}{0,003}$; f) $-0,14 = \frac{42}{x}$?

10.2. Проверка равенства дробей

Задача

Равны ли дроби:

a) $\frac{5}{12}$ и $\frac{25}{60}$; c) $\frac{2}{28}$ и $\frac{3}{47}$; e) $\frac{129}{250}$ и 0,516;

b) $\frac{9}{14}$ и $\frac{140815}{216342}$; d) 7,14 и $\frac{177}{25}$; f) $-\frac{26}{208}$ и $-\frac{3}{24}$?

Решение

Здесь можно действовать так же, как и при решении предыдущей задачи: определить, существует ли такое число, при умножении на которое числитель и знаменатель первой дроби превращаются в числитель и знаменатель второй дроби. Но быстрее и проще будет смотреть на обыкновенную дробь как на отношение двух чисел. Тогда можно сказать, что обыкновенные дроби равны друг другу, если они образуют пропорцию. В этом случае будет достаточно проверить выполнение основного свойства пропорции: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, если $a \cdot d = b \cdot c$.

a) Дробь $\frac{5}{12}$ равна $\frac{25}{60}$, так как $5 \cdot 60 = 300$; $12 \cdot 25 = 300$.

Несложно увидеть, что вторая дробь получена из первой путём умножения числителя и знаменателя на 5.

b) Дробь $\frac{9}{14}$ не равна $\frac{140815}{216342}$, так как $9 \cdot 216\,342 \neq 14 \cdot 140\,815$.

Чтобы убедиться в этом, не обязательно производить полное умножение. Достаточно увидеть, что первое произведение заканчивается на 8, так как произведение последних цифр $9 \cdot 2 = 18$, а второе заканчивается на 0, так как $4 \cdot 5 = 20$.

c) Дробь $\frac{2}{28}$ не равна $\frac{3}{47}$. Здесь последние цифры в произведениях $2 \cdot 47$ и $28 \cdot 3$ совпадают, но этого недостаточно. Нетрудно подсчитать, что $2 \cdot 47 \neq 28 \cdot 3$.

d) Десятичная дробь 7,14 не равна $\frac{177}{25}$. Чтобы убедиться в этом, запишем 7,14 в виде обыкновенной дроби: $\frac{714}{100}$ и проверим выполнение основного свойства пропорции: $714 \cdot 25 \neq 100 \cdot 177$.

e) Дробь $\frac{129}{250}$ равна десятичной дроби 0,516.

В этом можно убедиться, представив 0,516 в виде обыкновенной дроби: $\frac{516}{1000}$ и проверив выполнение основного свойства пропорции:

$129 \cdot 1000 = 250 \cdot 516$.

f) Дроби $-\frac{26}{208}$ и $-\frac{3}{24}$ равны, так как $26 \cdot 24 = 208 \cdot 3$. Конечно, при этом мы приняли во внимание то, что перед каждой дробью имеется знак минус. Отметим, что знак минус с одинаковым успехом может стоять или перед дробью, или перед числителем, или перед знаменателем.

270. Равны ли дроби:

a) $\frac{75}{182}$ и $\frac{25}{60}$;

b) $\frac{19}{44}$ и $\frac{3840812}{8826343}$;

c) $\frac{12}{68}$ и $\frac{3}{17}$;

d) 15,157 и $\frac{773}{51}$;

e) $-\frac{19}{25}$ и $-0,76$;

f) $-\frac{16}{281}$ и $-\frac{16}{281}$?

271. Равны ли дроби:

a) $\frac{15}{22}$ и $\frac{45}{66}$;

b) $\frac{9}{14}$ и $\frac{111123}{172858}$;

c) $\frac{2}{28}$ и $-\frac{3}{42}$;

d) 0,68 и $\frac{17}{250}$;

e) $\frac{29}{50}$ и $-0,58$;

f) $\frac{-6}{-28}$ и $\frac{30}{140}$?

10.3. НОК через набор множителей

Несколько ранее мы ввели понятие «наименьшее общее кратное – НОК». Теперь мы хотим посмотреть на него с несколько иной точки зрения, обозначенной в названии данного пункта. С этой целью вспомним, как раскладывать натуральные числа на простые множители (см. п. 9.3).

Задача

Определите множество P – множество простых множителей – числа: a) 6; b) 11; c) 75; d) 72.

Решение

a) Так как $6 = 2 \cdot 3$, искомое множество $P = \{2; 3\}$.

b) Число 11 является простым. Поэтому $P = \{11\}$.

c) Так как $75 = 25 \cdot 3 = 5 \cdot 5 \cdot 3$, число 5 встречается два раза. Мы не имеем право написать $P = \{5; 5; 3\}$, потому что каждый элемент множества записывается только один раз. Поэтому мы прибегнем к помощи индексов и запишем множество в следующем виде:

$P = \{5; 5_1; 3\}$.

Запись 5_1 читается «пять-один» и показывает, что число 5 встречается ещё один раз.

d) $72 = 8 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.

Поэтому $P = \{2; 2_1; 2_2; 3; 3_1\}$.

272. Определите множество P – множество простых множителей – числа: a) 10; b) 18; c) 100; d) 48.

273. Определите множество P – множество простых множителей – числа: a) 35; b) 17; c) 99; d) 500.

10.4. НОК через объединение множителей

Если мы имеем множества простых множителей для нескольких чисел, то задача определения НОК этих чисел является очень простой, потому что множество простых множителей числа, являющегося НОК, есть объединение множеств простых множителей исходных чисел.

Для нахождения НОК нескольких натуральных чисел надо:
1) разложить их на простые множители;
2) выписать множители, входящие в разложение одного из чисел;
3) добавить к ним недостающие множители из разложений остальных чисел;
4) найти произведение получившихся множителей.

Если одно из данных чисел делится без остатка на все остальные числа, то это число и является НОК данных чисел.

Задача

Определите НОК чисел, предварительно выписав множества простых множителей этих чисел: a) 15 и 21; b) 20 и 30; c) 105 и 27; d) 42, 10 и 28.

Решение

a) Так как $15 = 3 \cdot 5$, то соответствующее множество $F = \{3; 5\}$.

Для числа 21 множество простых множителей $S = \{3; 7\}$.

Объединив множества F и S, взяв элементы первого множества и добавив к ним элементы второго множества, которые не встречаются в первом, получим: $F \cup S = \{3; 5; 7\}$.

Произведение элементов объединения будет являться НОК:

НОК $(15; 21) = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

b) Числу 20 соответствует множество $F = \{2; 2_1; 5\}$, числу 30 – множество $S = \{2; 3; 5\}$.

Их объединение: $F \cup S = \{2; 2_1; 3; 5\}$ позволяет выписать НОК этих чисел:

НОК $(20; 30) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

c) Так как $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, а $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$, то объединение множеств простых множителей: $\{3; 5; 7; 3_1; 3_2\}$.

Поэтому НОК равно $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 = 945$.

d) Числу 42 соответствует множество $F = \{2; 3; 7\}$, числу 10 – множество $S = \{2; 5\}$, числу 28 – множество $T = \{2; 2_1; 7\}$.

Чтобы получить их объединение, вначале объединим два первых множества: $F \cup S = \{2; 3; 7; 5\}$, а затем объединим $F \cup S$ с третьим:

$F \cup S \cup T = \{2; 3; 7; 5; 2_1\}$.

Следовательно: НОК $(42; 10; 28) = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 420$.

274. Определите НОК чисел, предварительно выписав множества простых множителей этих чисел: a) 14 и 77; b) 12 и 18; c) 24 и 28; d) 32, 12 и 20.

275. Определите НОК чисел, предварительно выписав множества простых множителей этих чисел: a) 39 и 52; b) 44 и 34; c) 91 и 77; d) 35, 100 и 49.

10.5. НОД как пересечение множителей

Итак, оказалось, что задача определения НОК может быть решена через нахождение объединения множеств простых множителей исходных чисел. В то же время, наряду с нахождением объединения множеств, обычно находят и их пересечение. Оказывается, что произведение всех элементов, входящих в пересечение, является **НОД** – **наибольшим общим делителем** исходных чисел.

> Если натуральные числа a и b делятся без остатка на натуральное число c, то число c называется общим делителем чисел a и b. Самый большой из всех общих делителей называется НОД – наибольшим общим делителем. То, что число t является НОД для чисел a и b, будем записывать следующим образом: НОД $(a; b) = t$.

Для нахождения НОД нескольких натуральных чисел надо:

1) разложить их на простые множители;
2) из множителей, входящих в разложение одного из этих чисел, вычеркнуть те, которые не входят в разложения других чисел;
3) найти произведение оставшихся множителей.

Если все данные числа делятся на одно из них, то это число и является НОД данных чисел.

Задача

Определите НОД чисел, предварительно выписав множества простых множителей этих чисел:

a) 51 и 85; b) 40 и 24; c) 125 и 50; d) 42, 70 и 28; e) 15 и 28.

Решение

a) Так как сумма цифр числа 51 делится на 3, то оно делится на 3. Отсюда следует, что $51 = 3 \cdot 17$ и соответствующее множество: $F = \{3; 17\}$. Число 85 заканчивается на 5, поэтому оно делится на 5. Тогда $85 = 5 \cdot 17$, и ему соответствует множество $S = \{5; 17\}$. В пересечение двух множеств входят элементы, содержащиеся в обоих множествах: $F \cap S = \{17\}$. Произведение элементов пересечения будет являться НОД, но так как в данном случае в пересечении содержится только один элемент, то он и будет наибольшим общим делителем:

НОД (51; 85) = 17.

b) Числу 40 соответствует множество $F = \{2;\ 2^{-}_{1};\ 2^{-}_{2};\ 5\}$, числу 24 – множество $S = \{2;\ 2^{-}_{1};\ 2^{-}_{2};\ 3\}$. Их пересечение $F \cap S = \{2;\ 2^{-}_{1};\ 2^{-}_{2}\}$ позволяет выписать НОД этих чисел:

НОД (40; 24) = $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

c) Так как $125 = 5 \cdot 5 \cdot 5$, а $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$, то пересечение множеств простых множителей: {5; 5}. Поэтому НОД = $5 \cdot 5 = 25$.

d) Числу 42 соответствует множество $F = \{2;\ 3;\ 7\}$, числу 70 – множество $S = \{2;\ 5;\ 7\}$, числу 28 – множество $T = \{2;\ 2^{-}_{1};\ 7\}$. Чтобы получить их пересечение, вначале определим пересечение двух первых множеств:

$F \cap S = \{2;\ 7\}$, а затем найдём пересечение полученного множества с третьим:

$F \cap S \cap T = \{2;\ 7\}$.

Следовательно, НОД (42; 70; 28) = $2 \cdot 7 = 14$.

e) Числу 15 соответствует множество $F = \{3;\ 5\}$, числу 28 – множество $S = \{2;\ 2^{-}_{1};\ 7\}$. Их пересечение не содержит элементов – является пустым множеством. Символически это выражают следующим образом: $F \cap S = \varnothing$.

В этом случае НОД для этих чисел полагают равным единице:

НОД (15; 28) = 1.

Вместо приведённого в пункте 9.1 определения взаимно простых чисел может быть и такое:

> Если натуральные числа не имеют одинаковых простых множителей, то их называют взаимно простыми, а их наибольший общий делитель полагается равным единице.

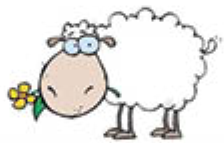
276. Определите НОД чисел, предварительно выписав множества простых множителей этих чисел: a) 14 и 22; b) 27 и 82; c) 144 и 80; d) 324 и 243; e) 39; 117 и 26.

277. Определите НОД чисел, предварительно выписав множества простых множителей этих чисел: a) 49 и 22; b) 27 и 18; c) 140 и 28; d) 32 и 20; e) 66; 114 и 21.

10.6. Распределение заработка

Задача

Канат проработал 833 часа, Джантемир проработал 595 часов. Как плату за работу они получили 24 барашка. Как они должны поделить заработанное, если каждый час работы оценивается одинаково?



Решение

Из условий задачи следует, что заработок должен быть поделён в отношении 833 : 595. Чтобы прояснить картину, преобразуем отношение к более простому. Как уже было сказано, отношение не меняется, если числитель и знаменатель разделить на одно и то же число. Оказывается, наиболее простой вид дробь примет, если в качестве этого числа взять НОД числителя и знаменателя.

Итак, найдём НОД для 833 и 595. Сразу видно, что число 595 можно разделить на 5. Тогда, $595 = 5 \cdot 119$. Другое число, 833, на 5 не делится. Попробуем его разделить на 119. Нам повезло, так как $833 = 7 \cdot 119$. Так как числа 5 и 7 – взаимно простые, других общих множителей нет. Следовательно, НОД (595; 833) = 119.

Разделив исходные числа на НОД, на число 119, получим $\frac{833}{595} = \frac{7}{5}$. Итак, мы определили, что заработок нужно поделить на $7 + 5 = 12$ равных частей и отдать Канату 7 частей, а Джантемиру – 5. Так как $24 : 12 = 2$, получаем, что каждой части соответствуют 2 барашка. Отсюда получаем, что Канат должен получить $7 \cdot 2 = 14$ барашков, а Джантемир: $5 \cdot 2 = 10$ барашков.

Задача

Гулькыз и Нурбек поделили x яблок в отношении $y : z$. Сколько получил каждый из них, если: a) $x = 21$; $y = 92$; $z = 69$; b) $x = 32$; $y = 154$; $z = 198$?

Решение

a) Нам нужно найти НОД для чисел 92 и 69. Так как 92 делится на 2, то $92 = 2 \cdot 46$. В свою очередь, 46 также делится на 2. Поэтому $92 = 2 \cdot 2 \cdot 23$. Число 69 на 2 не делится, зато делится на 23. То есть $69 = 3 \cdot 23$. Следовательно, НОД (92; 69) = 23.

Разделим 92 и 69 на 23 и получим $\frac{92}{69} = \frac{4}{3}$. Итак, яблоки были поделены на $4 + 3 = 7$ частей; по $21 : 7 = 3$ яблока в каждой части. Гулькыз получила $4 \cdot 3 = 12$ яблок, а Нурбек получил $3 \cdot 3 = 9$ яблок;

b) Найдём наибольшее общее кратное для чисел 154 и 198. Так как 154 делится на 2, то $154 = 2 \cdot 77$. В свою очередь, 77 делится на 11. Поэтому $154 = 2 \cdot 11 \cdot 7$.

Число 198 также делится и на 2, и на 11. Тогда $198 = 2 \cdot 11 \cdot 9$.

Итак, НОД (154; 198) = $2 \cdot 11 = 22$.

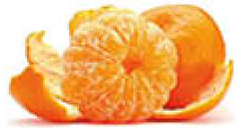
Сократим дробь и получим $\frac{154}{198} = \frac{7}{9}$. В этом случае яблоки были поделены на $7 + 9 = 16$ частей; по $32 : 16 = 2$ яблока в каждой части. Гулькыз получила $7 \cdot 2 = 14$ яблок, а Нурбек получил $9 \cdot 2 = 18$ яблок.

278. Вера и Лена поделили x апельсинов в отношении $y : z$. Сколько получила каждая из них, если: a) $x = 18$; $y = 126$; $z = 441$; b) $x = 30$; $y = 209$; $z = 76$?

279. Чинара и Гуля поделили x груш в отношении $y : z$. Сколько получила каждая из них, если: a) $x = 56$; $y = 72$; $z = 120$; b) $x = 38$; $y = 168$; $z = 98$?

10.7. Деление в заданном отношении

Задача



Джаныбек, Айбике и Дания поделили 32 мандарина в отношении 104 : 65 : 39. Сколько фруктов получил каждый из них?

Решение

Число 104 делится на 2 последовательно 3 раза.

Поэтому $104 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$.

Число 65 делится на 5. То есть $65 = 5 \cdot 13$.

Следовательно, НОД (104; 65) = 13.

В то же время и число 39 делится на 13. Таким образом, НОД (104; 65; 39) = 13. Разделим 104, 65 и 39 на 13 и получим:

$104 : 65 : 39 = 8 : 5 : 3$.

Отсюда узнаем, что мандарины были поделены на $8 + 5 + 3 = 16$ частей; по $32 : 16 = 2$ мандарина в каждой части. Джаныбек получил $8 \cdot 2 = 16$ мандаринов, Айбике получила $5 \cdot 2 = 10$ мандаринов, а Дания получила $3 \cdot 2 = 6$ мандаринов.

280. Айхан, Айдын и Сейфуллах поделили 42 граната в отношении 90 : 126 : 162. Сколько получил каждый из них?

281. Коля, Оля и Ира поделили 30 помидоров в отношении 152 : 175 : 210. Сколько получил каждый из них?

10.8. Сокращение дробей

Сокращением дроби называется замена её другой, равной ей дробью с меньшими членами, путём деления числителя и знаменателя на их общий делитель, не равный 1.

Наибольшее число, на которое можно сократить дробь, – это наибольший общий делитель её числителя и знаменателя.

Задача

Сократить дробь: a) $\frac{840}{3600}$; b) $\frac{72}{96}$.

Решение

a) Дробь можно сократить, последовательно сокращая на общие делители числителя и знаменателя.

Сначала сократим дробь на 10: $\frac{840}{3600} = \frac{84}{360}$.

Далее, дважды сократим на 2: $\frac{84}{360} = \frac{42}{180} = \frac{21}{90}$.

Числитель и знаменатель делятся на 3. Поэтому $\frac{21}{90} = \frac{7}{30}$.

Число 7 простое, а знаменатель на 7 не делится – дальнейшее сокращение невозможно – дробь $\frac{7}{30}$ несократимая.

b) Может возникнуть вопрос: «А нельзя ли провести сокращение только один раз и прийти к несократимой дроби?» Ответ: «Можно, если использовать наибольший общий делитель».

Найдём НОД (72; 96). Разложим числа 72 и 96 на простые множители:
$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$;
$96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$.

Произведение элементов пересечения соответствующих множеств:
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ есть искомое число.

Разделим числитель и знаменатель дроби $\frac{72}{96}$ на 24 и получим несократимую дробь: $\frac{72}{96} = \frac{3}{4}$.

Обыкновенная дробь является несократимой, если её числитель и знаменатель не имеют общих делителей – являются взаимно простыми, их наибольший общий делитель равен 1.

282. Сократите дробь.

a) $\frac{27}{21}$ b) $\frac{2800}{4200}$ c) $-\frac{102}{324}$ d) $\frac{140}{245}$

283. Сократите дробь.

a) $\frac{12}{15}$ b) $\frac{51}{34}$ c) $-\frac{12}{32}$ d) $\frac{135}{225}$

284. Сочините две задачи, подобные задачам, рассмотренным в данном параграфе.

1. При каком значении x справедливо равенство:

a) $\frac{x}{15} = \frac{2}{3}$; b) $\frac{51}{17} = \frac{39}{x}$; c) $-\frac{12}{32} = \frac{18}{x}$; d) $16 = \frac{x}{25}$?

2. Равны ли дроби:

a) $\frac{57}{822}$ и $\frac{19}{274}$; c) $\frac{23}{84}$ и $\frac{32}{106}$;

b) $\frac{93}{47}$ и $\frac{2426602}{1226347}$; d) 0,9957 и $\frac{773}{751}$?

3. Определите множество P – множество простых множителей – числа: a) 21; b) 45; c) 80; d) 117.

4. Определите НОК и НОД чисел:

a) 26 и 44; b) 50 и 75; c) 16 и 25; d) 36; 16 и 54.

5. Верно ли равенство?

a) НОК (14; 49) = НОД (98; 147)
b) НОК (4; 16) = НОД (48; 32)

6. Лариса и Диля поделили x бананов в отношении $y : z$. Сколько получила каждая из них, если:

a) $x = 28$; $y = 45$; $z = 81$; b) $x = 24$; $y = 105$; $z = 75$?

7. Сейил, Алла и Тамара поделили 40 орешков в отношении 112 : 196 : 252. Сколько получила каждая из них?

8. Эрмек утверждает, что если ни одно из двух натуральных чисел не делится на другое, то НОД этих чисел обязательно равен 1. Прав ли он?

9. Вычислите.

a) НОД (16; 17) b) НОД (14; 15; 16; 17; 18)

10. Имеются два утверждения:

A. Если одно из двух натуральных чисел простое, то их НОД равен 1.
B. Если одно из двух последовательных натуральных чисел простое, то их НОД равен 1.

Выберите правильный ответ.

a) Верно A. c) Оба верны.
b) Верно B. d) Оба неверны.

11. Сократите дробь.

a) $\frac{22}{165}$ b) $\frac{52}{84}$ c) $-\frac{27}{369}$ d) $\frac{56000}{105000}$

§ 11. Действия над обыкновенными дробями

В предыдущих параграфах мы учились применять наименьшее общее кратное – НОК и наибольший общий делитель – НОД. Стоит отметить, что чаще всего они применяются при выполнении действий с обыкновенными дробями. О правилах выполнения арифметических действий с обыкновенными дробями мы будем говорить в этом параграфе.

11.1. Правильные и неправильные дроби

В повседневной жизни мы постоянно встречаемся с дробями. Мы говорим: *половина* торта; *две трети* часа; *семь шестых* нормы и тому подобное.

> Обыкновенную дробь изображают с помощью целого числа, записанного над дробной чертой – числителя, и натурального числа под дробной чертой – знаменателя.
>
> Дробь называется **правильной**, если её числитель по модулю меньше знаменателя, в противном случае дробь неправильная.

Задача

Какие из указанных дробей правильные, какие неправильные.

a) $\frac{7}{8}$ b) $\frac{29}{18}$ c) $-\frac{17}{18}$ d) $-\frac{77}{16}$ e) $\frac{72}{72}$

Решение

a) Обыкновенная дробь $\frac{7}{8}$ – правильная, потому что её числитель – число 7 – меньше знаменателя, числа 8.

b) Дробь $\frac{29}{18}$ – неправильная, так как $29 > 18$.

c) Когда мы делим обыкновенные дроби на правильные и неправильные, то не обращаем внимания на знаки. Поэтому мы говорим, что дробь $-\frac{17}{18}$ правильная, потому что $17 < 18$.

d) Дробь $-\frac{77}{16}$ неправильная, так как $77 > 16$.

e) Дробь $\frac{72}{72}$ неправильная, потому что $72 = 72$.

285. Определите, какие из указанных дробей – правильные, какие – неправильные.

a) $\frac{3}{7}$ b) $-\frac{31}{72}$ c) $-\frac{112}{13}$ d) $-\frac{13}{23}$ e) $\frac{72}{24}$ f) $\frac{27}{27}$

286. Определите, какие из указанных дробей – правильные, какие – неправильные.

a) $\frac{11}{6}$ b) $-\frac{63}{70}$ c) $-\frac{1002}{933}$ d) $-\frac{31}{103}$ e) $\frac{34}{34}$ f) $-\frac{42}{42}$

11.2. Умножение обыкновенных дробей

Выполнить умножение обыкновенных дробей может каждый, кто умеет перемножать целые числа, если воспользуется правилом.

- **Чтобы умножить дробь на натуральное число**, надо её числитель умножить на это число, а знаменатель оставить без изменения.
- **Чтобы умножить дробь на дробь**, надо:
  1) найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей;
  2) первое произведение записать числителем, а второе – знаменателем.

Или, коротко:

> Произведение обыкновенных дробей есть дробь, в числителе и знаменателе которой стоят, соответственно, произведения числителей и знаменателей сомножителей.

- **Чтобы найти дробь от числа**, надо умножить число на эту дробь.

Задача

Выполните умножение.

a) $\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{5}$ c) $-\frac{17}{18}\cdot\frac{9}{68}$ e) $\frac{11}{27}\cdot\frac{15}{88}$

b) $\frac{5}{18}\cdot\frac{-7}{12}$ d) $\frac{77}{16}\cdot\frac{8}{25}$ f) $\frac{11}{25}\cdot 5$

Решение

a) $\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{5}=\frac{7\cdot 3}{8\cdot 5}=\frac{21}{40}$

b) $\frac{5}{18}\cdot\frac{-7}{12}=\frac{5\cdot(-7)}{18\cdot 12}=\frac{-35}{216}$

c) $-\frac{17}{18}\cdot\frac{9}{68}=-\frac{17\cdot 9}{18\cdot 68}=$ (Не торопитесь умножать. Полезно заметить, что числитель и знаменатель делятся на 9 и на 17.) $=-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}=-\frac{1}{8}$

d) $\frac{77}{16}\cdot\frac{8}{25}=\frac{77\cdot 8}{16\cdot 25}=\frac{77\cdot 1}{2\cdot 25}=\frac{77}{50}$.

Мы перемножили дроби и получили ответ в виде несократимой дроби. Но стоит заметить, что произведение легко записать в виде дроби со знаменателем 100 – получить десятичную дробь. А как уже не раз отмечалось, работать с десятичными дробями обычно проще, чем с произвольными обыкновенными дробями. Поэтому имеет смысл помнить, что ответ может быть записан в виде

$$\frac{77}{16}\cdot\frac{8}{25}=\frac{77}{50}=\frac{77\cdot 2}{50\cdot 2}=\frac{154}{100}=1{,}54.$$

e) $\frac{11}{27}\cdot\frac{15}{88}=\frac{11\cdot 15}{27\cdot 88}=\frac{1\cdot 15}{27\cdot 8}=\frac{1\cdot 5}{9\cdot 8}=\frac{5}{72}$

f) Чтобы вычислить произведение $\frac{11}{25}\cdot 5$, нужно помнить о том, что любое целое число можно записать в виде обыкновенной дроби со знаменателем 1.

Тогда $\frac{11}{25}\cdot 5=\frac{11}{25}\cdot\frac{5}{1}=\frac{11\cdot 5}{25\cdot 1}=\frac{11\cdot 1}{5\cdot 1}=\frac{11}{5}$.

Полезно запомнить следующее: при умножении целого числа и дроби можно это целое число напрямую перемножить с числителем дроби, тогда сразу имеем: $\frac{11}{25}\cdot 5=\frac{11\cdot 5}{25}$ и т. д.

287. Выполните умножение.

a) $\frac{17}{28}\cdot\frac{3}{5}$　c) $-\frac{7}{38}\cdot\frac{19}{28}$　e) $\frac{16}{25}\cdot\frac{15}{8}$

b) $\frac{-3}{8}\cdot\frac{11}{12}$　d) $\frac{27}{36}\cdot\frac{18}{21}$　f) $7\cdot\frac{17}{21}$

288. Выполните умножение.

a) $\frac{2}{13}\cdot\frac{9}{14}$　c) $-\frac{19}{18}\cdot\frac{6}{57}$　e) $\frac{16}{35}\cdot\frac{15}{88}$

b) $\frac{5}{8}\cdot\frac{-2}{25}$　d) $\frac{72}{80}\cdot\frac{7}{54}$　f) $\frac{4}{27}\cdot 54$

11.3. Деление обыкновенных дробей

После того как мы научились выполнять умножение обыкновенных дробей, деление дробей становится лёгкой задачей.

> Чтобы разделить обыкновенные дроби, нужно делимое умножить на дробь, которая получается в результате замены местами числителя и знаменателя делителя.

Задача

Выполните деление.

a) $\frac{7}{8}:\frac{3}{5}$ b) $\frac{5}{18}:\frac{-7}{12}$ c) $-\frac{17}{28}:\frac{9}{56}$ d) $\frac{15}{22}:5$

Решение

a) $\frac{7}{8} : \frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 5}{8 \cdot 3} = \frac{35}{24}$

b) $\frac{5}{18} : \frac{-7}{12} = \frac{5 \cdot 12}{18 \cdot (-7)} = -\frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 7} = -\frac{10}{21}$

Мы воспользовались тем, что при делении положительного числа на отрицательное получается отрицательное число, а также тем, что числа 12 и 18 делятся на 6.

c) $-\frac{17}{28} : \frac{9}{56} = -\frac{17 \cdot 56}{28 \cdot 9} = -\frac{17 \cdot 2}{1 \cdot 9} = -\frac{34}{9}$.

d) Чтобы разделить $\frac{15}{22}$ на 5, запишем 5 в виде $\frac{5}{1}$.

Тогда $\frac{15}{22} : 5 = \frac{15}{22} : \frac{5}{1} = \frac{15 \cdot 1}{22 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 1}{22 \cdot 1} = \frac{3}{22}$.

289. Выполните деление.

a) $\frac{7}{13} : \frac{3}{5}$ b) $\frac{-3}{8} : \frac{11}{12}$ c) $-\frac{7}{38} : \frac{3}{28}$ d) $7 : \frac{15}{22}$

290. Выполните деление.

a) $\frac{2}{3} : \frac{9}{14}$ b) $\frac{5}{8} : \frac{-20}{21}$ c) $-\frac{19}{18} : \frac{76}{72}$ d) $\frac{4}{9} : 14$

11.4. Сравнение дробей с одинаковыми знаменателями

Задача

Если вам предложат получить $\frac{3}{8}$ или $\frac{17}{44}$ пирога, то что вы предпочтёте?

Решение

Обычно желательно получить большую часть, поэтому предстоит выяснить, какая дробь больше. В этом нам поможет следующее свойство дробей:

> Если дроби имеют одинаковый положительный знаменатель, то больше та дробь, у которой больше числитель.

Итак, нам предстоит уравнять знаменатели. Для этого достаточно воспользоваться тем, что дробь не меняется, если её числитель и знаменатель умножить на одно и то же число. Если в качестве такого числа для первой дроби взять знаменатель второй, а для второй дроби, соответственно, знаменатель первой, получим требуемое:

$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 44}{8 \cdot 44} = \frac{132}{352}$; $\frac{17}{44} = \frac{17 \cdot 8}{44 \cdot 8} = \frac{136}{352}$.

Итак, мы выяснили, что $\frac{17}{44}$ пирога лучше.

При получении одинаковых знаменателей нам пришлось перемножать относительно большие числа. Чтобы несколько упростить этот процесс, в качестве одинакового знаменателя полезно брать наименьшее общее кратное знаменателей.

Так как НОК (8; 44) = 11 · 8 = 88, а 88 : 8 = 11; 88 : 44 = 2, умножим числитель и знаменатель первой дроби на 11, второй – на 2.

Тогда $\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 11}{8 \cdot 11} = \frac{33}{88}$; $\frac{17}{44} = \frac{17 \cdot 2}{44 \cdot 2} = \frac{34}{88}$.

291. Какая дробь больше:

a) $\frac{17}{82}$ или $\frac{8}{41}$; b) $\frac{13}{84}$ или $\frac{10}{63}$?

292. Какая дробь больше:

a) $\frac{21}{32}$ или $\frac{27}{40}$; b) $\frac{35}{48}$ или $\frac{23}{30}$?

11.5. Сравнение дробей с одинаковыми числителями

Задача

Какая дробь больше:

a) $\frac{17}{82}$ или $\frac{17}{81}$; b) $\frac{13}{87}$ или $\frac{39}{263}$;

c) $\frac{13}{84}$ или $-\frac{10}{63}$; d) $-\frac{7}{36}$ или $-\frac{5}{28}$?

Решение

a) Всем понятно, что половина торта больше, чем его третья часть. Этот факт в общем виде можно сформулировать в виде правила:

> Если положительные дроби имеют одинаковый числитель, то больше та дробь, у которой меньше знаменатель.

Следовательно, $\frac{17}{82}$ меньше, чем $\frac{17}{81}$.

b) Чтобы сравнить числа $\frac{13}{87}$ и $\frac{39}{263}$, можно преобразовать их и получить дроби с одинаковыми знаменателями. Но в данном случае гораздо проще преобразовать их к дробям с одинаковыми числителями:

$\frac{13}{87} = \frac{13 \cdot 3}{87 \cdot 3} = \frac{39}{261}$ и $\frac{39}{263}$.

Следовательно, $\frac{13}{87} > \frac{39}{263}$.

c) Любое положительное число больше любого отрицательного. Поэтому $\frac{13}{84}$ больше, чем $-\frac{10}{63}$.

d) Для отрицательных чисел имеет место противоположное неравенство, чем для соответствующих положительных чисел. Поэтому достаточно сравнить сперва положительные числа $\frac{7}{36}$ и $\frac{5}{28}$. Для этого найдём наименьшее общее кратное: НОК (36; 28) = 28 · 9 = 252 и приведём дроби к общему знаменателю: $\frac{7 \cdot 7}{36 \cdot 7} = \frac{49}{252}$ и $\frac{5 \cdot 9}{28 \cdot 9} = \frac{45}{252}$.

Отсюда видно, что $\frac{7}{36} > \frac{5}{28}$. Следовательно, $-\frac{7}{36} < -\frac{5}{28}$.

293. Какая дробь меньше:

a) $\frac{7}{82}$ или $\frac{14}{163}$; b) $-\frac{10}{84}$ или $-\frac{10}{63}$; c) $-\frac{17}{30}$ или $-\frac{37}{65}$?

294. Какая дробь больше:

a) $\frac{17}{82}$ или $\frac{51}{241}$; b) $\frac{1}{84}$ или $-\frac{10}{16}$; c) $-\frac{27}{62}$ или $-\frac{41}{93}$?

11.6. Сумма и разность дробей с одинаковыми знаменателями

Настало время говорить о сложении и вычитании обыкновенных дробей.

> Сумма (разность) обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями есть дробь с тем же знаменателем, в числителе которой стоит сумма (разность) числителей исходных дробей.

Задача

Вычислите.

a) $\frac{7}{18} + \frac{3}{18}$ c) $-\frac{17}{28} - \frac{9}{28}$ e) $\frac{3}{34} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{17}$

b) $\frac{5}{8} - \frac{3}{8}$ d) $\frac{15}{22} - \frac{5}{22} + \frac{17}{22}$ f) $\frac{7}{9} : 5 - \frac{4}{45}$

Решение

a) $\frac{7}{18} + \frac{3}{18} = \frac{7+3}{18} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$

b) $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5-3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

c) $-\frac{17}{28} - \frac{9}{28} = \frac{-17-9}{28} = -\frac{(17+9)}{28} = -\frac{26}{28} = -\frac{13}{14}$

d) $\frac{15}{22}-\frac{5}{22}+\frac{17}{22}=\frac{15-5+17}{22}=\frac{27}{22}$

e) Чтобы вычислить значение выражения $\frac{3}{34}-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{17}$, сначала, как того требуют правила, выполним умножение: $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{17}=\frac{1\cdot 5}{2\cdot 17}=\frac{5}{34}$.

Теперь завершим вычисление: $\frac{3}{34}-\frac{5}{34}=\frac{3-5}{34}=-\frac{2}{34}=-\frac{1}{17}$.

f) $\frac{7}{9}:5-\frac{4}{45}=\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{5}-\frac{4}{45}=\frac{7}{45}-\frac{4}{45}=\frac{3}{45}=\frac{1}{15}$.

295. Вычислите.

a) $\frac{7}{8}+\frac{1}{8}$ c) $\frac{17}{23}-\frac{19}{23}$ e) $\frac{13}{24}\cdot\frac{-2}{13}+\frac{5}{12}$

b) $\frac{15}{28}-\frac{3}{28}$ d) $\frac{5}{21}-\frac{8}{21}-\frac{17}{21}$ f) $\frac{7}{9}:\frac{2}{3}-\frac{5}{6}$

296. Вычислите.

a) $\frac{7}{15}-\frac{13}{15}$ c) $-\frac{1}{38}-\frac{29}{38}$ e) $\frac{3}{13}+\frac{57}{26}\cdot\frac{4}{19}$

b) $\frac{5}{7}+\frac{9}{7}$ d) $\frac{13}{27}+\frac{15}{27}-\frac{7}{27}-\frac{17}{27}$ f) $\frac{7}{19}\cdot 5-\frac{4}{5}:\frac{76}{85}$

11.7. Сумма и разность обыкновенных дробей

Чтобы выполнить сложение (вычитание) обыкновенных дробей нужно:

I. привести их к общему знаменателю;

II. выполнить сложение (вычитание) обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями.

Задача

Вычислите.

a) $\frac{7}{18}+\frac{5}{6}$ c) $-\frac{7}{8}-\frac{9}{28}$ e) $\frac{7}{33}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{18}$

b) $\frac{5}{8}-\frac{1}{6}$ d) $\frac{15}{21}-\frac{5}{14}+\frac{17}{35}$ f) $\frac{7}{9}:\frac{2}{3}-\frac{4}{15}\cdot 5$

Решение

a) $\frac{7}{18}+\frac{5}{6}=\frac{7}{18}+\frac{5\cdot 3}{6\cdot 3}=\frac{7+15}{18}=\frac{22}{18}=\frac{11}{9}$

b) $\frac{5}{8}-\frac{1}{6}=\frac{5\cdot 3}{8\cdot 3}-\frac{1\cdot 4}{6\cdot 4}=\frac{15-4}{24}=\frac{11}{24}$

c) $-\frac{7}{8}-\frac{9}{28}=-\frac{7\cdot 7}{8\cdot 7}-\frac{9\cdot 2}{28\cdot 2}=-\frac{49+18}{56}=-\frac{67}{56}$

d) $\frac{15}{21}-\frac{5}{14}+\frac{17}{35}=\frac{15\cdot 10}{21\cdot 10}-\frac{5\cdot 15}{14\cdot 15}+\frac{17\cdot 6}{35\cdot 6}=\frac{150-75+102}{210}=\frac{177}{210}=\frac{59}{70}$

e) $\frac{7}{33}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{18}=\frac{7}{33}-\frac{3\cdot 5}{4\cdot 18}=\frac{7}{33}-\frac{1\cdot 5}{4\cdot 6}=\frac{7}{33}-\frac{5}{24}=$

$=\frac{7\cdot 8}{33\cdot 8}-\frac{5\cdot 11}{24\cdot 11}=\frac{56-55}{264}=\frac{1}{264}$

f) $\frac{7}{9}:\frac{2}{3}-\frac{4}{15}\cdot 5=\frac{7\cdot 3}{9\cdot 2}-\frac{4\cdot 5}{15\cdot 1}=\frac{7\cdot 1}{3\cdot 2}-\frac{4\cdot 1}{3\cdot 1}=\frac{7}{6}-\frac{4}{3}=\frac{7-2\cdot 4}{6}=-\frac{1}{6}$

297. Вычислите.

a) $\frac{7}{18}+\frac{1}{9}$ c) $\frac{1}{21}-\frac{9}{14}$ e) $\frac{13}{24}:\frac{26}{33}+\frac{5}{12}$

b) $\frac{1}{2}-\frac{3}{8}$ d) $\frac{5}{42}-\frac{8}{21}+\frac{1}{14}$ f) $\frac{7}{15}-\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}$

298. Вычислите.

a) $\frac{7}{15}-\frac{3}{5}$ c) $-\frac{1}{32}-\frac{29}{40}$ e) $\frac{9}{13}-\frac{5}{26}\cdot\frac{4}{9}$

b) $\frac{5}{7}+\frac{9}{77}$ d) $\frac{5}{42}-\frac{8}{24}+\frac{1}{8}$ f) $\frac{7}{9}:5+\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{8}$

11.8. Смешанные дроби

Мы собираемся купить булочки на 20 сомов. Если булочка стоит 4 сома, то мы сумеем купить $\frac{20}{4}=5$ булочек, если 5 сомов, то $\frac{20}{5}=4$ булочки. Если же булочка стоит 6 сомов, то мы сумеем купить 3 булочки и получим 2 сома сдачи. Эту ситуацию записывают следующим образом: $\frac{20}{6}=3+\frac{2}{6}$.

В своё время математики договорились, что в таких ситуациях они будут пропускать знак плюс между целым положительным числом и обыкновенной дробью. Поэтому вместо $3+\frac{2}{6}$ пишут $3\frac{2}{6}$ и называют это выражение смешанным числом. Число 3 в данном случае является целой частью смешанного числа, а $\frac{2}{6}$ – дробной частью. Дробная часть смешанного числа должна быть правильной дробью.

Например, если булочка стоит 7 сомов, то мы сумеем купить 2 булочки и получим 6 сомов сдачи: $\frac{20}{7}=2\frac{6}{7}$.

Производя вычисления со смешанными числами, мы воспринимаем их как единое выражение. Например, выражение $5-2\frac{3}{17}$ означает $5-\left(2+\frac{3}{17}\right)$; выражение $15\cdot\left(1\frac{3}{11}\right)$ означает $15\cdot\left(1+\frac{3}{11}\right)$.

Любая дробь, у которой числитель по модулю больше знаменателя, т. е. неправильная дробь, может быть записана в виде смешанной дроби, и обратно, любая смешанная дробь может быть преобразована в неправильную дробь.

Задача

1) Запишите в виде смешанной дроби.

a) $\frac{25}{18}$ b) $-\frac{2100}{600}$

2) Запишите в виде неправильной дроби.

c) $2\frac{7}{8}$ d) $-5\frac{5}{14}$

Решение

a) Так как, разделив 25 на 18, мы получим 1 в частном и 7 в остатке, то $\frac{25}{18} = 1\frac{7}{18}$.

b) В данном случае на знак «минус» можно не обращать внимания – его мы поставим перед полученным выражением. Кроме того, будет полезно предварительно сократить дробь: $-\frac{2100}{600} = -\frac{21}{6} = -\frac{7}{2}$. Тогда, так как при делении 7 на 2 получится 3 в частном и 1 в остатке, то $-\frac{2100}{600} = -3\frac{1}{2}$.

c) Как уже говорилось, смешанная дробь есть сумма целой и дробной частей.

Поэтому $2\frac{7}{8} = 2 + \frac{7}{8} = \frac{2}{1} + \frac{7}{8} = \frac{2 \cdot 8}{1 \cdot 8} + \frac{7}{8} = \frac{16+7}{8} = \frac{23}{8}$.

d) Смешанная дробь $-5\frac{5}{14}$ означает $-\left(5 + \frac{5}{14}\right)$.

Так как $5 + \frac{5}{14} = \frac{5}{1} + \frac{5}{14} = \frac{5 \cdot 14}{1 \cdot 14} + \frac{5}{14} = \frac{70+5}{14} = \frac{75}{14}$, получаем, что $-5\frac{5}{14} = -\frac{75}{14}$.

299. Запишите в виде смешанной дроби.

a) $\frac{25}{8}$ b) $-\frac{6200}{800}$

300. Запишите в виде неправильной дроби.

a) $4\frac{3}{7}$ b) $-11\frac{2}{11}$

301. Запишите в виде смешанной дроби.

a) $\frac{35}{17}$ b) $-\frac{42100}{700}$

302. Запишите в виде неправильной дроби.

a) $10\frac{7}{81}$ b) $-2\frac{15}{42}$

11.9. Операции со смешанными дробями

Мы умеем производить все арифметические операции – сложение, вычитание, умножение и деление – над обыкновенными дробями, а также превращать смешанные дроби в обыкновенные и обратно. Следовательно, мы умеем производить все арифметические операции над смешанными дробями. Но довольно часто при работе со смешанными дробями бывает удобнее действовать напрямую, не превращая их в обыкновенные неправильные дроби.

Задача

Вычислите.

a) $3\frac{7}{18}+2\frac{1}{6}$ c) $544\frac{7}{12}-542\frac{9}{28}$ e) $6\cdot 7\frac{7}{33}$

b) $187\frac{5}{8}+3\frac{5}{6}$ d) $5-3\frac{5}{14}$ f) $15\frac{7}{9}:3$

Решение

a) При работе со смешанными дробями важно помнить, что запись $3\frac{7}{18}$ означает $3+\frac{7}{18}$. Тогда $3\frac{7}{18}+2\frac{1}{6}=3+\frac{7}{18}+\left(2+\frac{1}{6}\right)$.

Кроме этого, отметим, что при действиях с обыкновенными дробями справедливы свойства, сформулированные для целых и натуральных чисел: при перемене мест слагаемых сумма не меняется; в первую очередь выполняются действия в скобках и т. п. Поэтому

$$3\frac{7}{18}+2\frac{1}{6}=3+\frac{7}{18}+\left(2+\frac{1}{6}\right)=3+2+\frac{7}{18}+\frac{1}{6}=$$

$$=5+\frac{7+3}{18}=5+\frac{10}{18}=5+\frac{5}{9}=5\frac{5}{9}.$$

b) $187\frac{5}{8}+3\frac{5}{6}=187+\frac{5}{8}+3+\frac{5}{6}=190+\frac{5}{8}+\frac{5}{6}$

Так как НОК (8; 6) = 24,

$$190+\frac{5}{8}+\frac{5}{6}=190+\frac{5\cdot 3}{8\cdot 3}+\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}=190+\frac{15+20}{24}=190+\frac{35}{24}=$$

$$=190+1\frac{11}{24}=191\frac{11}{24};$$

c) $544\frac{7}{12}-542\frac{9}{28}=544+\frac{7}{12}-\left(542+\frac{9}{28}\right)=2+\frac{7}{12}-\frac{9}{28}$

НОК (12; 28) = 12 · 7 = 84 и поэтому

$$2+\frac{7}{12}-\frac{9}{28}=2+\frac{7\cdot 7}{12\cdot 7}-\frac{9\cdot 3}{28\cdot 3}=2+\frac{49-27}{84}=2+\frac{22}{84}=2\frac{11}{42};$$

d) $5-3\frac{5}{14}=2-\frac{5}{14}=1+1-\frac{5}{14}=1+\frac{14-5}{14}=1\frac{9}{14};$

e) $6\cdot 7\frac{7}{33}=6\left(7+\frac{7}{33}\right)=42+6\cdot\frac{7}{33}=42+\frac{6\cdot 7}{33}=42+\frac{2\cdot 7}{11}=42+\frac{14}{11}=$

$$=42+1\frac{3}{11}=43\frac{3}{11};$$

f) $15\frac{7}{9} : 3 = \left(15 + \frac{7}{9}\right) : 3 = 15 : 3 + \frac{7}{9} : 3 = 5 + \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{3} = 5 + \frac{7}{27} = 5\frac{7}{27}$.

303. Решите задачу пункта 11.9, используя переход к неправильным дробям. Например: $5\frac{7}{28} + 21\frac{1}{7} = \frac{147}{28} + \frac{148}{7} = \frac{147 + 4 \cdot 148}{28} = \frac{739}{28} = 26\frac{11}{28}$.

Сравните сложность вычислений.

304. Вычислите.

a) $3\frac{7}{8} + 27\frac{1}{64}$
c) $43\frac{5}{12} - 21\frac{3}{20}$
e) $6 \cdot 15\frac{17}{32}$
b) $17\frac{3}{10} + 33\frac{5}{6}$
d) $51 - 38\frac{15}{17}$
f) $54\frac{6}{19} : 18$

305. Вычислите.

a) $13\frac{7}{12} + 42\frac{1}{6}$
c) $473\frac{5}{12} - 362\frac{4}{21}$
e) $11 \cdot 4\frac{17}{31}$
b) $872\frac{5}{8} + 15\frac{25}{36}$
d) $55 - 23\frac{51}{64}$
f) $52\frac{2}{3} : 13$

11.10. Отработка техники вычислений с дробями

Задача

Вычислите.

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{2}\left(4\frac{1}{4} : 17\right) + 3{,}75 : \frac{5}{6}$$

Решение

При выполнении таких заданий в первую очередь необходимо определиться с порядком действий, помня, что сначала выполняются действия в скобках, а также то, что сложение и вычитание выполняются после умножения и деления.

1) $4\frac{1}{4} : 17 = \frac{17}{4} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{4}$

2) $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

3) $3{,}75 : \frac{5}{6} = \frac{375}{100} \cdot \frac{6}{5} = \frac{15}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{1} = \frac{9}{2}$

4) $\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = \frac{8}{8} = 1$

5) $1 + \frac{9}{2} = \frac{2 + 9}{2} = \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2} = 5{,}5$

306. Вычислите.

a) $\left(\frac{14}{15}+2\frac{1}{2}+0,3\right)\frac{8}{7}\cdot\frac{3}{4}+0,5$ b) $\left(0,5+\frac{1}{8}-\frac{1}{6}\right)\left(6,4 : 26\frac{2}{3}\right)+0,125$

307. Вычислите.

a) $4\left(3\frac{2}{5}-1\frac{7}{40}\right)+12,5 : 6\frac{1}{4}+3$

b) $\left(2\frac{3}{4}-1,5\right)+\left(2,5-1\frac{7}{8}\right) : \frac{1}{8}-0,25$

11.11. Блочный принцип вычислений

Задача

Вычислите.

$$\frac{\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot 7}{\left(5\frac{5}{8}-2\frac{11}{18}\right)\cdot 1\frac{5}{31}}$$

Решение

Это выражение мы понимаем как дробь вида $\frac{A}{B}$, где числитель A равен $\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot 7$, а знаменатель B равен $\left(5\frac{5}{8}-2\frac{11}{18}\right)\cdot 1\frac{5}{31}$.

Вычислим значение A.

1) $\frac{29}{35}-\frac{3}{7}=\frac{29}{35}-\frac{3\cdot 5}{7\cdot 5}=\frac{29-15}{35}=\frac{14}{35}$

2) $\frac{14}{35}\cdot 7=\frac{14}{35}\cdot\frac{7}{1}=\frac{14}{5}\cdot\frac{1}{1}=\frac{14}{5}$

Теперь вычислим значение B.

3) $5\frac{5}{8}-2\frac{11}{18}=3+\frac{5}{8}-\frac{11}{18}=3+\frac{5\cdot 9}{8\cdot 9}-\frac{11\cdot 4}{18\cdot 4}=3+\frac{45-44}{72}=3\frac{1}{72}$

4) $3\frac{1}{72}\cdot 1\frac{5}{31}=\frac{217}{72}\cdot\frac{36}{31}=\frac{7}{72}\cdot\frac{36}{1}=\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{7}{2}$

Завершим вычисление, разделив A на B.

5) $\frac{14}{5} : \frac{7}{2}=\frac{14}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{4}{5}=0,8$.

308. Вычислите.

a) $\dfrac{\left(4,3-\frac{16}{25} : 1\frac{3}{5}\right)\cdot 0,25}{\frac{25}{16} : 2,5+0,375\cdot\frac{1}{3}}$ b) $\dfrac{\left(1\frac{2}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\right)\cdot 0,6}{\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{1}{65}+0,25}$

309. Вычислите.

a) $\dfrac{(10-1,1\ :\ 0,23)\cdot 0,46+1\frac{4}{5}}{\left(2,75-1\frac{10}{17}\ :\ \frac{54}{51}\right)\cdot 0,8}$ b) $\dfrac{\left(\frac{6}{5}\ :\ 36+1,2\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot 9}{\left(2\frac{38}{45}-\frac{1}{15}\right)\ :\ 13\frac{8}{9}}$

11.12. Использование блочного принципа для решения уравнений

Задача

Чему равен x, если

$$\frac{2\frac{1}{6}-\frac{53}{6}\cdot 0,2}{14x}=\frac{\left(7\frac{1}{2}-6\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}}{\left(\frac{15}{2}+4\frac{3}{4}\right)\ :\ 0,5}?$$

Решение

Это выражение удобно представить как пропорцию $\frac{A}{14x}=\frac{B}{C}$, где A равно $2\frac{1}{6}-\frac{53}{6}\cdot 0,2$, B равно $\left(7\frac{1}{2}-6\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}$, а C равно $\left(\frac{15}{2}+4\frac{3}{4}\right)\ :\ 0,5$.

Вычислим значение A.

1) $\frac{53}{6}\cdot 0,2=\frac{53}{6}\cdot\frac{2}{10}=\frac{53}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{53}{30}$

2) $2\frac{1}{6}-\frac{53}{30}=\frac{13}{6}-\frac{53}{30}=\frac{13\cdot 5}{6\cdot 5}-\frac{53}{30}=\frac{65-53}{30}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$

Затем вычислим значение B.

3) $7\frac{1}{2}-6\frac{3}{4}=1+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=\frac{4}{4}+\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}-\frac{3}{4}=\frac{4+2-3}{4}=\frac{3}{4}$

4) $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$

Далее, вычислим значение C.

5) $\frac{15}{2}+4\frac{3}{4}=\frac{15}{2}\cdot\frac{2}{2}+\frac{19}{4}=\frac{30+19}{4}=\frac{49}{4}$

6) $\frac{49}{4}\ :\ 0,5=\frac{49}{4}\ :\ \frac{5}{10}=\frac{49\cdot 2}{4\cdot 1}=\frac{49}{2}$

Итак, имеет место пропорция $\dfrac{\frac{2}{5}}{14x}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{49}{2}}$.

Согласно основному свойству пропорции: $\frac{2}{5}\cdot\frac{49}{2}=\frac{1}{2}\cdot 14x$.

Отсюда следует, что $\frac{49}{5}=7x$.

Поэтому $x=\frac{49}{5}\ :\ 7=\frac{49}{5}\cdot\frac{1}{7}=\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{1}=1,4$.

310. Чему равен x, если

$$\frac{7\frac{2}{3}+\frac{39}{2}\cdot 0{,}2}{\frac{3}{5}:0{,}1+4{,}2}=\frac{2x}{\frac{7}{2}+30{,}5}?$$

311. Чему равен x, если

$$\frac{17{,}7-2{,}6:1\frac{1}{3}}{4x}=\frac{5-\frac{1}{5}\cdot 2{,}5}{\left(\frac{23}{5}+\frac{7}{3}\right):1\frac{11}{15}}?$$

312. Сочините две задачи, подобные задачам, рассмотренным в данном параграфе.

1. Определите, какие из указанных дробей правильные, какие – неправильные, какие – смешанные:

a) $-2\frac{3}{17}$; b) $\frac{131}{-72}$; c) $\frac{12}{13}$; d) $-\frac{13}{13}$; e) $5\frac{21}{24}$; f) $-\frac{2}{27}$?

2. Определите, какая дробь больше:

a) $2\frac{17}{82}$ или $\frac{177}{82}$; b) $-\frac{13}{17}$ или $-\frac{13}{16}$;

c) $\frac{13}{48}$ или $\frac{17}{64}$; d) $-\frac{7}{36}$ или $-\frac{5}{27}$?

e) $-\frac{17}{482}$ или $-\frac{17}{481}$; f) $\frac{17}{87}$ или $\frac{34}{173}$;

g) $3\frac{13}{14}$ или $\frac{83}{21}$; h) $-5{,}2$ или $-\frac{37}{7}$?

3. Запишите в виде смешанной дроби.

a) $-\frac{35}{11}$ b) $\frac{427000}{6000}$

4. Запишите в виде неправильной дроби.

a) $2000\frac{7}{18}$ b) $-112\frac{5}{7}$

5. Вычислите.

a) $3 : \frac{17}{82}$ c) $2\frac{3}{8}\cdot 4$ e) $-\frac{7}{8}+5$ g) $3\frac{13}{14}-2\frac{5}{6}$

b) $\frac{68}{91}\cdot\frac{13}{17}$ d) $-\frac{7}{36} : 3\frac{1}{9}$ f) $\frac{17}{87}+2\frac{3}{29}$ h) $-\frac{3}{9}-1\frac{3}{14}$

6. Вычислите.

a) $\dfrac{2\frac{3}{4} : 1{,}1+3\frac{1}{3}}{2{,}5-0{,}4\cdot 3\frac{1}{3}}$ b) $\dfrac{\left(2\frac{1}{6}+4{,}5\right)\cdot 0{,}375}{1\frac{3}{4}-1{,}5}$

c) $\dfrac{\frac{1}{6}+0{,}1+\frac{1}{15}}{\frac{1}{6}+0{,}1-\frac{1}{15}} : \dfrac{25}{63}$ d) $\dfrac{0{,}5-\frac{1}{3}-0{,}2+\frac{1}{4}}{0{,}25-\frac{1}{6}} : 1\frac{6}{7}$

7. Чему равен *x*, если:

a) $\dfrac{(0{,}6+0{,}425-0{,}005) : \frac{1}{10}}{30{,}5+\frac{1}{6}+3\frac{1}{3}}=\dfrac{x}{26 : 3\frac{5}{7}}$;

b) $\dfrac{\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{3}{16}}{0{,}625-\frac{13}{18} : 2\frac{8}{9}}=\dfrac{\left(0{,}56+\frac{216}{15}\right) : \frac{1}{2}}{2x}$?

§ 12. Степени. Абсолютная и относительная погрешность

12.1. Степень числа

Разложив на простые множители число 512, получим
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Равенство $512 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, конечно, верное, но это и подобные ему равенства практически не встречаются в математических текстах. Дело в том, что такая форма записи очень неудобна – придётся приложить некоторые усилия для того, чтобы убедиться в том, что имеет место произведение девяти «двоек». Поэтому математики договорились использовать понятие степени.

Согласно этой договоренности, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^9$. Видимо, не стоит произносить лишние слова, убеждая в удобстве такой системы записи чисел.

> Произведение n одинаковых чисел называется n-ой степенью числа a: $a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a = a^n$.
>
> Число a называется основанием, число n – показателем степени.

Следует отметить, что введение понятия степень – это ни в коем случае не прихоть математиков. Степень естественным образом появляется из окружающей действительности.

Так, используя степень, удобно записать:
площадь квадрата со стороной a: $S = a \cdot a = a^2$;
объём куба со стороной b: $V = b \cdot b \cdot b = b^3$.

Интересный факт из биологии: простейшее одноклеточное животное инфузория парамеция (туфелька) в среднем делится пополам каждые 27 часов. Если бы все инфузории оставались в живых, то через 540 часов вместо одной «туфельки» было бы 2^{20} «туфелек».

Задача

1) Запишите, используя степень:
   a) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$;
   b) $0{,}23 \cdot 0{,}23 \cdot 0{,}23 \cdot 0{,}23 \cdot 0{,}23$;
   c) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$;
   d) $\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7}$.

2) Вычислите:
   a) 14^2; b) $(0{,}5)^3$; c) $(7{,}3)^4$; d) $\left(\frac{10}{17}\right)^2$; e) $\left(5\frac{5}{9}\right)^3$.

Решение

1) a) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4$;

b) $0{,}23 \cdot 0{,}23 \cdot 0{,}23 \cdot 0{,}23 \cdot 0{,}23 = 0{,}23^5$;

c) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 7^4 \cdot 3^5$;

d) $\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \left(\frac{3}{7}\right)^6$.

2) a) $14^2 = 14 \cdot 14 = 196$;

b) $(0{,}5)^3 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}125$;

c) $(7{,}3)^4 = 7{,}3 \cdot 7{,}3 \cdot 7{,}3 \cdot 7{,}3 = 53{,}29 \cdot 53{,}29 = 2839{,}8241$;

d) $\left(\frac{10}{17}\right)^2 = \frac{10}{17} \cdot \frac{10}{17} = \frac{10 \cdot 10}{17 \cdot 17} = \frac{100}{289}$;

e) $\left(5\frac{5}{9}\right)^3 = \left(\frac{50}{9}\right)^3 = \frac{50 \cdot 50 \cdot 50}{9 \cdot 9 \cdot 9} = \frac{125000}{729} = 171\frac{341}{729}$.

313. 1) Запишите, используя степень:

a) $41 \cdot 41 \cdot 41 \cdot 41 \cdot 41$;

b) $3{,}21 \cdot 3{,}21 \cdot 3{,}21 \cdot 3{,}21 \cdot 3{,}21 \cdot 3{,}21 \cdot 3{,}21$;

c) $9 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3$;

d) $\frac{5}{11} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{5}{11}$.

2) Вычислите:

a) 11^3; b) $(2{,}1)^2$; c) $(0{,}3)^4$; d) $\left(\frac{3}{13}\right)^3$; e) $\left(6\frac{2}{3}\right)^4$.

314. 1) Запишите, используя степень:

a) $114 \cdot 114 \cdot 114 \cdot 114 \cdot 114 \cdot 114$;

b) $0{,}003 \cdot 0{,}003 \cdot 0{,}003 \cdot 0{,}003$;

c) $7 \cdot 77 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 77 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3$;

d) $1\frac{9}{71} \cdot 1\frac{9}{71} \cdot 1\frac{9}{71} \cdot 1\frac{9}{71}$.

2) Вычислите:

a) 2^7; b) $(20{,}2)^3$; c) $(0{,}12)^2$; d) $\left(\frac{1}{3}\right)^5$; e) $\left(14\frac{2}{7}\right)^2$.

12.2. Произведение степенных выражений

На основе определения степени:

$2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$;

$3^6 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^8$;

$0{,}33^5 \cdot 0{,}33^3 = (0{,}33 \cdot 0{,}33 \cdot 0{,}33 \cdot 0{,}33 \cdot 0{,}33) \cdot (0{,}33 \cdot 0{,}33 \cdot 0{,}33) = (0{,}33)^8$.

Эти равенства иллюстрируют свойство степени.

При умножении степенных выражений, если основания одинаковы, показатели степеней складываются, а основание остается прежним: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

315. Убедитесь в том, что следующие равенства верны. Что можно сказать о показателях степени?

a) $2^3 \cdot 2^5 = 2^4 \cdot 2^4$; c) $7^3 \cdot 7^4 \cdot 7^4 = 7^2 \cdot 7^8 \cdot 7$;
b) $6^7 \cdot 6^6 = 6^5 \cdot 6^8$; d) $3^7 \cdot 3^9 \cdot 3 = 3^{11} \cdot 3^6$.

Задача

Решите уравнения:
1) $5^2 \cdot 5^x = 5^9$; 2) $2^{3x} \cdot 8 = 2^{2x} \cdot 32$.

Решение

1) Согласно сформулированному свойству, из $5^2 \cdot 5^x = 5^9$ следует, что $5^{2+x} = 5^9$. Тогда, $2 + x = 9$, и, как следствие, $x = 7$.

В то же время, разделив обе части уравнения $5^2 \cdot 5^x = 5^9$ на 5^2, получим, что $5^x = \frac{5^9}{5^2}$.

Сравнив с полученным ранее, так как $x = 7$, получим, что $\frac{5^9}{5^2} = 5^7$. В итоге можем сформулировать ещё одно свойство степени.

> При делении степенных выражений, если основания одинаковы, показатели степеней вычитаются, а основание остается прежним: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

2) Проверим сформулированное свойство на уравнении $2^{3x} \cdot 8 = 2^{2x} \cdot 32$.

С одной стороны, так как $8 = 2^3$; $32 = 2^5$, получаем, что $2^{3x} \cdot 2^3 = 2^{2x} \cdot 2^5$. Тогда, $2^{3x+3} = 2^{2x+5}$ и отсюда $3x + 3 = 2x + 5$. Следовательно, $x = 2$.

С другой стороны, можно разделить уравнение на 8: $2^{3x} = 2^{2x} \cdot 4$, затем на 2^{2x}: $\frac{2^{3x}}{2^{2x}} = 4$. Тогда, по свойству деления, $\frac{2^{3x}}{2^{2x}} = 2^{3x-2x} = 2^x$. А так как $4 = 2^2$, получаем $2^x = 2^2$.

Итак, мы убедились в том, что если основания одинаковы, при умножении степенных выражений показатели складываются, а при делении вычитаются.

316. Решите уравнения:

a) $3^3 \cdot 3^x = 3^5 \cdot 3^4$; b) $5^{5x} \cdot 5 = 5^{3x} \cdot 125$.

317. Решите уравнения:

a) $4^x \cdot 4^5 = 4^{11} \cdot 4^4$; b) $6^{2x} \cdot 36 = 6^{4x}$.

12.3. Нулевая степень. Степень степени

Задача

Докажите, что:
a) $42^0 = 1$; b) $(9^2)^3 = 9^6$; c) $2^3 \cdot 7^3 = 14^3$.

Решение

a) Пожалуй, все согласятся с тем, что $\frac{42^{44}}{42^{44}} = 1$. В то же время, согласно вышесказанному, $\frac{42^{44}}{42^{44}} = (42)^{44-44} = (42)^0$. Следовательно, $42^0 = 1$.

Заметим, что рассуждения никак не изменятся, если на месте 42 и 44 будут другие числа. Тем самым установлено свойство:

> Нулевая степень любого числа, кроме 0, равна 1: $a^0 = 1$.

b) По определению степени: $(9^2)^3 = 9^2 \cdot 9^2 \cdot 9^2$.

Далее: $9^2 \cdot 9^2 \cdot 9^2 = (9 \cdot 9) \cdot (9 \cdot 9) \cdot (9 \cdot 9)$.

А это, в свою очередь, $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^6$;

Подобные выкладки справедливы, если на месте 9, 2 и 3 будут другие числа. Таким образом, установлено, что:

> При возведении степени в степень показатели степеней перемножаются: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.
>
> Далее, $a^{n \cdot m} = a^{m \cdot n} = (a^m)^n$.
>
> Итак, $(a^n)^m = (a^m)^n$.

c) Произведение $2^3 \cdot 7^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ можно переписать в виде $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = (2 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 7) = 14 \cdot 14 \cdot 14$.

Следовательно, $2^3 \cdot 7^3 = 14^3$.

Ещё раз произнеся слова о том, что в данном случае конкретные значения чисел не важны, получим свойство:

> При умножении степенных выражений с разными основаниями, но одинаковыми показателями степени основания перемножаются, а показатель степени остаётся без изменения: $(a^n) \cdot (b^n) = (a \cdot b)^n$.
>
> Аналогично, при делении степенных выражений с разными основаниями, но одинаковыми показателями степени основания делятся друг на друга, а показатель степени остаётся без изменения: $(a^n) : (b^n) = (a : b)^n$.

318. Вычислите.

$$\frac{17^{15}}{51^{14}} \cdot 9^7 - 5^0$$

319. Вычислите.

$$\frac{72^{11}}{9^{10} \cdot 2^{34}} + 53^0$$

В завершение соберём выявленные свойства степени вместе.

Свойства степени

При умножении степенных выражений, если основания одинаковы, показатели степени складываются: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

При делении степенных выражений, если основания одинаковы, показатели степени вычитаются: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

Нулевая степень любого числа равна 1: $a^0 = 1$.

При возведении степени в степень показатели степени перемножаются: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

Произведение степенных выражений, если они имеют одинаковую степень, равно этой степени от произведения оснований: $(a^n) \cdot (b^n) = (a \cdot b)^n$.

Отношение степенных выражений, если они имеют одинаковую степень, равно этой степени от отношения оснований: $(a^n) : (b^n) = (a : b)^n$.

12.4. Погрешность

У Алишера была 1000 сомов, у Тилека было 25 сомов. И так уж случилось, что оба потеряли по 5 сомов. Как вы думаете, кто из них пострадал больше?

Можно ответить: они пострадали одинаково, так как потеряли одинаковое количество денег – по 5 сомов. В таком случае математики говорят, что решение принято на основе абсолютного значения.

Возможен и другой ответ. Алишер потерял $\frac{5}{1000} = 0{,}005$ от имевшихся денег. А Тилек потерял $\frac{5}{25} = 0{,}2$ денег. Таким образом, Тилек пострадал гораздо сильнее. Если мы выносим решение таким образом, то говорят, что принято во внимание относительное значение. Очень часто относительное значение выражают в процентах. Говоря на этом языке, мы скажем, что Алишер потерял 0,5% от имевшихся денег, а Тилек потерял 20%.

Задача

Числа 123,4 и 512,6 округлили до целых значений. Чему равна абсолютная и относительная погрешности округления?

Абсолютная погрешность округления – это модуль разности между истинным и приближённым значениями.

Решение

В данном случае, так как $123{,}4 \approx 123$; $512{,}6 \approx 513$, абсолютные погрешности одинаковы: $|123{,}4 - 123| = 0{,}4$; $|512{,}6 - 513| = 0{,}4$.

Относительная погрешность округления – это отношение абсолютной погрешности к модулю истинного значения.

В данном случае это

$\frac{0,4}{123,4} \approx 0,00324 = 0,324\%$ и $\frac{0,4}{512,6} \approx 0,00078 = 0,078\%$.

В жизни часто приходится измерять различные величины, например, длину и ширину различных предметов или объектов. Для выяснения того, в каком случае произведено более точное измерение, необходимо использовать относительную погрешность.

Пример

При измерении поля длиной в 200 метров ошибочно получили 196 метров, а в случае доски длиной в 2 метра неверно получили 190 *см*. В каком случае было более точное измерение ?

Решение

Абсолютные погрешности измерений длин поля и доски равны соответственно $200\,м - 196\,м = 4\,м$ и $2\,м - 1,9\,м = 0,1\,м$. Относительная погрешность в случае поля равна $\frac{4}{200} = \frac{1}{50}$ или в процентах, $\frac{1}{50} \cdot 100 = 2\%$. Относительная погрешность в случае доски равна $\frac{0,1}{2} = \frac{1}{20}$ или в процентах, $\frac{1}{20} \cdot 100 = 5\%$.

Итак, более точно была измерена длина поля, несмотря на гораздо большую соответствующую абсолютную ошибку по сравнению с абсолютной ошибкой в случае доски.

320. Вычислите. Число 5127,495 округлили до десятков. Чему равна абсолютная и относительная погрешности округления?

321. Вычислите. Число 143,578 округлили до целого. Чему равна абсолютная и относительная погрешности округления?

1. Запишите, используя степень:

a) $17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17$;
b) $3{,}1 \cdot 3{,}1 \cdot 3{,}1 \cdot 3{,}1 \cdot 3{,}1 \cdot 3{,}1$;
c) $9 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 13$;
d) $5\frac{5}{17} \cdot 5\frac{5}{17} \cdot 5\frac{5}{17}$.

2. Вычислите.

a) 21^3; b) $(0{,}1)^4$; c) $(5{,}211)^2$; d) $\left(\frac{13}{23}\right)^2$; e) $\left(5\frac{5}{7}\right)^3$.

3. Вычислите.

$$\frac{80^7}{5^8 \cdot 2^{29}} + \frac{5^6 \cdot 3^6}{15^6}$$

4. Число 84,507 округлили до целого. Чему равна абсолютная и относительная погрешности округления?

5. Вычислите.

$$\frac{27^3 \cdot 4^5}{6^8} - \frac{5^5 \cdot 2^4}{10^4} + \frac{2^6 \cdot 3^4}{6^4}$$

§ 13. Задачи на составление уравнений

13.1. Проверка корня уравнения

Как мы уже отмечали, очень большой круг проблем, касающихся самых различных сторон окружающей нас жизни, можно решить, используя алгебраические уравнения. В этом параграфе мы рассмотрим уравнения, включающие обыкновенные дроби.

Для начала освежим в памяти некоторые соответствующие понятия.

Равенство, содержащее неизвестные числа, обозначенные буквами, называют **уравнением**.

Например: $5{,}2x = 8{,}65 + \frac{7}{8}x$; $5x - \frac{3}{7}y + 5 = 3{,}5y - 4z$.

Значения неизвестных, которые превращают уравнение в верное числовое равенство, называются **корнями уравнения**.

Например, число 2 является корнем уравнения

$5{,}2x = 8{,}65 + \frac{7}{8}x$, потому что $5{,}2 \cdot 2 = 8{,}65 + \frac{7}{8} \cdot 2$.

Процесс нахождения корней уравнения называется **решением уравнения**.

В результате решения уравнения находят все корни уравнения или показывают, что корней нет.

Задача

Является ли число $\frac{3}{7}$ корнем уравнений?

a) $28x = 12$

b) $3x - 1 = \frac{1}{7}$

c) $5x - 2 = \frac{2}{11} - \frac{1}{11}x$

d) $15(y - 6) + 99 = 3(5 + 2y) - 4y$

Решение

a) Подставим в уравнение вместо x число $\frac{3}{7}$ и получим верное равенство $28 \cdot \frac{3}{7} = 12$. Следовательно, число $\frac{3}{7}$ является корнем уравнения $28x = 12$.

b) Заменив x на число $\frac{3}{7}$, в левой части получим:

$$3 \cdot \frac{3}{7} - 1 = \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{7} - \frac{7}{7} = \frac{9 - 7}{7} = \frac{2}{7}.$$

Но это число не равно числу, стоящему в правой части. Следовательно, число $\frac{3}{7}$ не является корнем уравнения $3x - 1 = \frac{1}{7}$.

c) Подставив значение x в уравнение, получим:

$5 \cdot \frac{3}{7} - 2 = \frac{2}{11} - \frac{1}{11} \cdot \frac{3}{7}$. Это верное равенство, так как

$5 \cdot \frac{3}{7} - 2 = \frac{5 \cdot 3 - 2 \cdot 7}{7} = \frac{1}{7}$ и $\frac{2}{11} - \frac{1}{11} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 - 3}{11 \cdot 7} = \frac{11}{11 \cdot 7} = \frac{1}{7}$.

Итак, число $\frac{3}{7}$ – корень уравнения $5x - 2 = \frac{2}{11} - \frac{1}{11}x$.

d) Чтобы убедиться в том, что число $\frac{3}{7}$ корнем не является, можно подставить его в уравнение вместо y и вычислить полученные в левой и правой частях выражения. Но проверка будет заметно проще, если сначала раскроем скобки: $15y - 90 + 99 = 15 + 6y - 4y$ и приведём подобные члены: $15y + 9 = 15 + 2y$; $13y = 6$.

Теперь подставим значение y: $13 \cdot \frac{3}{7} = \frac{39}{7} = 5\frac{4}{7}$ и увидим, что левая часть меньше, чем правая.

322. Является ли число $\frac{11}{6}$ корнем уравнений?

a) $18x = 33$

b) $\frac{12}{17}x + \frac{12}{17} = 3$

c) $15x - 18 = 9,5$

d) $5(z + 6) + 3z = 2(5 - 2z) - 2$

323. Является ли число $-\frac{2}{3}$ корнем уравнений?

a) $27x = 18$

b) $\frac{9}{14}x - \frac{4}{7} = -1$

c) $3x + 21 = 19$

d) $29 - 3(y + 6) = 3(5 - y) + 6y$

13.2. Решение уравнений с дробными коэффициентами

Корни уравнения не изменятся, если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля.

Корни уравнения не изменятся, если какое-нибудь слагаемое перенести из одной части равенства в другую, изменив при этом знак переносимого слагаемого.

Задача

Решите уравнения.

a) $\frac{5}{14}x = -20$

b) $9x - \frac{4}{7} = 2$

c) $\frac{3}{13}x + \frac{4}{17} = \frac{9}{26}x + 1\frac{4}{17}$

d) $2 - 5(x + 17) = 20 - 8x$

e) $\frac{1}{3}+\left(x+\frac{4}{7}\right)=1\frac{5}{6}-\left(x+\frac{5}{14}\right)$

f) $9x=279\frac{4}{7}$

Решение

Чтобы решить предложенные уравнения, нужно привести подобные члены, собрав неизвестные в одну сторону уравнения, а числа в другую. После приведения уравнения к стандартному виду $ax = b$, для которого $x=\frac{b}{a}$, нужно разделить уравнение на коэффициент при неизвестной и получить решение.

a) Разделим обе части уравнения $\frac{5}{14}x=-20$ на $\frac{5}{14}$ и получим: $x=-20:\frac{5}{14}=-\frac{20\cdot 14}{1\cdot 5}=-\frac{4\cdot 14}{1\cdot 1}=-56$

b) Перенесём число $-\frac{4}{7}$ в правую часть уравнения $9x-\frac{4}{7}=2$. При этом, так как в левой части это число имело знак минус, вправо оно перейдёт с плюсом. В итоге получим уравнение: $9x=2\frac{4}{7}$. Разделив полученное уравнение на 9, получим корень уравнения: $x=2\frac{4}{7}:9=\left(2+\frac{4}{7}\right):9=\frac{18}{7}:\frac{9}{1}=\frac{18\cdot 1}{7\cdot 9}=\frac{2\cdot 1}{7\cdot 1}=\frac{2}{7}$

c) Решение уравнения $\frac{3}{13}x+\frac{4}{17}=\frac{9}{26}x+1\frac{4}{17}$ начнём с того, что соберём «иксы» в левой, а числа в правой части уравнения:

$\frac{3}{13}x-\frac{9}{26}x=1\frac{4}{17}-\frac{4}{17}$.

В левой части получим: $\frac{3}{13}x-\frac{9}{26}x=\frac{3\cdot 2}{13\cdot 2}x-\frac{9}{26}x=\frac{6-9}{26}x=-\frac{3}{26}x$.

В правой части: $1\frac{4}{17}-\frac{4}{17}=\left(1+\frac{4}{17}\right)-\frac{4}{17}=1$.

Итак, $-\frac{3}{26}x=1$.

Следовательно, $x=1:\left(-\frac{3}{26}\right)=-\frac{1}{1}\cdot\frac{26}{3}=-\frac{26}{3}=-8\frac{2}{3}$

d) Приведём уравнение $2-5(x+17)=20-8x$ к стандартному виду: $2-5x-85=20-8x$; $-5x-83=20-8x$; $-5x+8x=20+83$; $3x=103$. Разделив полученное уравнение $3x = 103$ на 3, получим $x=\frac{103}{3}=34\frac{1}{3}$.

e) Соберём неизвестные уравнения $\frac{1}{3}\left(x+\frac{4}{7}\right)=1\frac{5}{6}-\left(x+\frac{5}{14}\right)$ в левой части, а числа в правой, предварительно раскрыв скобки:

$\frac{1}{3}\left(x+\frac{4}{7}\right)=1\frac{5}{6}-\left(x+\frac{5}{14}\right)$; $\frac{1}{3}x+\frac{4}{21}=\frac{11}{6}-x-\frac{5}{14}$;

$\frac{1}{3}x+x=-\frac{4}{21}+\frac{11}{6}-\frac{5}{14}$.

В левой части получим: $\frac{1}{3}x + x = \left(\frac{1}{3} + 1\right)x = \frac{1+3}{3}x = \frac{4}{3}x.$

В правой части воспользуемся тем, что НОК (21; 6; 14) = 42. Тогда:

$$-\frac{4}{21} + \frac{11}{6} - \frac{5}{14} = -\frac{4 \cdot 2}{21 \cdot 2} + \frac{11 \cdot 7}{6 \cdot 7} - \frac{5 \cdot 3}{14 \cdot 3} = \frac{-8 + 77 - 15}{42} = \frac{54}{42} = \frac{9}{7}$$

Получили уравнение $\frac{4}{3}\ x = \frac{9}{7}$. Разделив его на $\frac{4}{3}$, получим решение: $x = \frac{9}{7} : \frac{4}{3} = \frac{9 \cdot 3}{7 \cdot 4} = \frac{27}{28}$.

f) Понятно, что это уравнение можно решить, преобразовав смешанную дробь в неправильную: $9x = 279\frac{4}{7}$; $9x = \frac{1957}{7}$.

Тогда $x = \frac{1957}{7} : \frac{9}{1} = \frac{1957 \cdot 1}{7 \cdot 9} = \frac{1957}{63}$.

Теперь преобразуем неправильную дробь в смешанную и запишем корень уравнения в виде $x = 31\frac{4}{63}$.

Также этот корень можно получить гораздо проще, вспомнив смысл смешанной дроби:

$$9x = 279\frac{4}{7};\ x = \left(279 + \frac{4}{7}\right) : 9 = 279 : 9 + \frac{4}{7} : 9 = 31 + \frac{4}{7 \cdot 9} = 31\frac{4}{63}$$

324. Решите уравнения.

a) $\frac{51}{14}x = 102$

b) $11x + 3\frac{4}{7} = 2$

c) $\frac{3}{8}x + \frac{6}{7} = 5 - \frac{5}{6}x$

d) $21(x - 5) = 2(10 - 7x)$

e) $\frac{2}{1}\left(2x + \frac{1}{3}\right) = 2\frac{1}{6} - \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{33}\right)$

325. Решите уравнения.

a) $\frac{15}{34}x = 210$

b) $\frac{7}{9}x - \frac{4}{27} = \frac{1}{18}$

c) $\frac{3}{4}x + \frac{4}{7} = x - 1\frac{3}{14}$

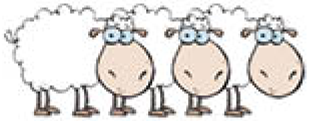
d) $12 - 3(2x + 7) = 2 - 9x$

e) $\frac{1}{3}x - \frac{13}{15} = 1\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{3}\right)$

13.3. Задачи на составление уравнений с дробными коэффициентами

Мы уже говорили об уравнениях в 5 классе. Повторим, что умение решать уравнения, подобные уравнениям в задаче 13.2 и упражнениях 322, 323 является очень важным, так как с помощью таких уравнений можно описать многие проблемы из окружающей нас жизни. В связи с этим появляется ещё более важная задача – научиться переводить такие проблемы на язык уравнений. А чтобы научиться, нужно тренироваться. Во-первых, посмотреть и понять, как это делается, изучив предложенные решения задач. Во-вторых, самим решать упражнения. И в-третьих, попробовать самим сочинять такие задачи.

Решение задачи начинается с внимательного прочтения. Нужно понять, что дано и что требуется найти. После этого составить уравнение, обозначив буквой неизвестную величину. Как правило, при введении обозначений полезно опираться на поставленный вопрос. Решив полученное уравнение, нужно ясно себе представить, что означает найденный корень, и проверить его правильность, используя текст исходной задачи.



Задача

У Базарбая и Рысбая 1532 овцы. Сколько овец у Базарбая, если стадо Рысбая на $\frac{2}{3}$ меньше, чем у Базарбая?

Решение

Если через x обозначить количество овец Базарбая, то $x - \frac{2x}{3}$ – это количество овец Рысбая. Эти величины связывает уравнение $x + \left(x - \frac{2x}{3}\right) = 1532$. Складываем выражения в левой части: $\frac{4}{3}x = 1532$ и затем, разделив обе части уравнения на $\frac{4}{3}$, получим, что Базарбай имеет: $x = 1532 : \frac{4}{3} = \frac{1532}{1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{383 \cdot 3}{1 \cdot 1} = 1149$ овец.

Решите задачу несколько иначе, обозначив через x количество овец Рысбая.

326. Айна и Сыртбай вместе вырастили 22 тонны картофеля, причём доля Сыртбая на $\frac{1}{6}$ меньше. Сколько картофеля вырастила Айна?

327. Александра и Павел в течение первой четверти получили 55 пятёрок. Сколько пятёрок получила Александра, если пятёрок у Павла на $\frac{3}{7}$ меньше?

13.4. Определение стоимости покупки

Задача

Айнура купила картофель и морковь на 70 сомов. Сколько денег было истрачено на морковь, если эта сумма составляет $\frac{4}{3}$ расходов на картофель?

Решение

Обозначим через x количество денег, истраченных на картофель. Тогда количество денег, истраченных на морковь, равно $\frac{4}{3}x$. В результате получаем уравнение: $x + \frac{4}{3}x = 70$.

Приведём подобные члены: $\frac{7}{3}x = 70$ и найдем количество денег, истраченных на картофель: $x = 70 : \frac{7}{3} = \frac{70 \cdot 3}{1 \cdot 7} = 30$. Следовательно, морковь куплена на $\frac{4}{3}x = \frac{4}{3} \cdot 30 = \frac{4 \cdot 30}{3 \cdot 1} = \frac{4 \cdot 10}{1 \cdot 1} = 40$ сомов.

328. Нарынбек купил финансовый калькулятор и ручку за 1520 сомов. Сколько стоила ручка, если цена калькулятора составляет $\frac{31}{7}$ цены ручки?

329. Мария продала аспирин и анальгин за 2800 сомов. Сколько сомов было получено за аспирин, если за анальгин получено в одиннадцать девятых раз больше?

13.5. Определение цены

Задача

Эльмира купила 3 *кг* капусты и 2 *кг* моркови. По какой цене она купила морковь, если эта цена равнялась $\frac{6}{7}$ цены капусты? Известно, что у неё было 200 сомов, а после этих покупок остался 101 сом?

Решение

Обозначим цену капусты буквой p. Тогда, цена моркови равна $\frac{6p}{7}$, и из условий задачи получаем $200 - \left(3p + 2 \cdot \frac{6p}{7}\right) = 101$. Соберём неизвестные члены уравнения в левой части, а числа в правой:

$-\left(3p + \frac{12p}{7}\right) = 101 - 200.$

Следовательно, $\frac{33p}{7} = 99$. Разделим полученное уравнение на $\frac{3}{7}$ и получим: $p = 21$.

Мы определили, что Эльмира купила капусту по цене 21 *сом./кг*, а морковь по цене $\frac{6p}{7} = \frac{6 \cdot 21}{7}$ = 18 *сом./кг*.

Проверим этот ответ: Эльмира заплатила за капусту $21 \cdot 3 = 63$ сома; за морковь: $18 \cdot 2 = 36$ сомов. Следовательно, всего она потратила $63 + 36 = 99$ сомов, а $200 - 99 = 101$ сом остаток.

330. Чинара купила 5 килограммов муки и 2 литра растительного масла. По какой цене она купила муку, если эта цена равнялась $\frac{3}{11}$ цены растительного масла? Известно, что у неё было 500 сомов, а после этих покупок осталось 93 сома?

331. Автандил продал 25 килограммов малины и 34 литра молока. По какой цене он продал молоко, если эта цена равнялась $\frac{2}{17}$ цены малины? Известно, что у него было 7000 сомов, а после этих продаж стало 10 451 сом?

332. Составьте и решите задачи, используя данные покупок, которые совершили вы и члены вашей семьи.

13.6. Определение количества книг

Задача

Количество книг на верхней полке равно $\frac{7}{9}$ книг на нижней полке. Если с нижней полки переставить на верхнюю 4 книги, то книг на полках станет поровну. Сколько книг на каждой из полок?

Решение

Обозначив через x количество книг на нижней полке, получим, что книг на верхней полке $\frac{7}{9}x$. После перестановки на верхней полке будет $\frac{7}{9}x + 4$, на нижней полке $x - 4$ книг.

Так как книг станет поровну, получаем уравнение $\frac{7}{9}x + 4 = x - 4$. Перенесём число 4 вправо со знаком минус, одночлен x влево со знаком минус и получим $\frac{7}{9}x - x = -4 - 4$. Тогда $-\frac{2}{9}x = -8$ и, разделив на $-\frac{2}{9}$, получим: $x = (-8) : \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{8}{1} : \frac{2}{9} = \frac{8 \cdot 9}{1 \cdot 2} = \frac{4 \cdot 9}{1 \cdot 1} = 36$. Итак, на нижней полке 36 книг, а на верхней полке: $\frac{7}{9}x = \frac{7}{9} \cdot 36 = \frac{7 \cdot 36}{9} = \frac{7 \cdot 4}{1} = 28$ книг.

Проверяем: если с нижней полки переставить 4 книги на верхнюю, то на нижней останется $36 - 4 = 32$ книги, а на верхней также станет $28 + 4 = 32$ книги.

333. Количество груш в корзине составляет $\frac{5}{7}$ от их количества в ящике. Если из ящика переложить в корзину 3 груши, то груш в корзине и в ящике будет поровну. Сколько яблок в корзине?

334. Вес пшеницы, завезённой на первый хлебозавод, составляет $\frac{11}{15}$ от веса пшеницы, завезённой на второй. Если бы 6 тонн пшеницы вместо второго хлебозавода отвезли на первый, то пшеницы на хлебозаводах было бы поровну. Сколько пшеницы завезли на первый хлебозавод?

13.7. Определение веса винограда

Задача

Вес винограда в корзине составляет $\frac{12}{17}$ от веса винограда в ящике. Если переложить 7 килограммов винограда из корзины в ящик, то винограда в ящике будет в два раза больше, чем в корзине. Сколько винограда в ящике?

Решение

Обозначив через x количество килограммов винограда в ящике, получим, что винограда в корзине $\frac{12}{17}x$. После перекладывания в корзине будет $\frac{12}{17}x - 7$, в ящике $x + 7$ *кг* винограда.

Так как винограда в ящике станет в два раза больше, получаем уравнение $x + 7 = 2\left(\frac{12}{17}x - 7\right)$. Откроем скобки: $x + 7 = \frac{24}{17}x - 14$, перенесём число 7 вправо со знаком минус, одночлен $\frac{24}{17}x$ влево со знаком минус и получим $x - \frac{24}{17}x = -14 - 7$. Тогда $-\frac{24}{17}x = -21$ и отсюда следует: $x = (-21) : \left(-\frac{7}{17}\right) = \frac{21}{1} : \frac{7}{17} = \frac{21 \cdot 17}{1 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 17}{1 \cdot 1} = 51$. Итак, в ящике 51 килограмм винограда, а в корзине: $\frac{12}{17}x = 1 \cdot 51 = \frac{12 \cdot 51}{17} = \frac{12 \cdot 3}{1} = 36$ *кг*.

Проверяем: если из корзины переложить 7 килограммов винограда в ящик, то в корзине останется: $36 - 7 = 29$ *кг*, а в ящике будет: $51 + 7 = 58$ *кг* – в 2 раза больше.

335. В маленькой бочке было в 5 раз меньше бензина, чем в большой. После того как из большой бочки перелили 10 литров бензина в маленькую, в большой бочке осталось $\frac{25}{11}$ от количества бензина в маленькой. Сколько бензина было в большой бочке в начале?

336. Количество яблок в корзине составляет $\frac{2}{7}$ от их количества в ящике. Если из ящика переложить в корзину 5 яблок, то яблок в корзине будет в 2 раза меньше, чем в ящике. Сколько яблок в ящике?

337. Составьте и решите задачи на перестановки, перекладывания, по типу задач из пункта 13.7.

13.8. Определение числа элементов множества

Задача

В классе из 33 учащихся 20 девочек. Из 33 человек 18 – местные, остальные – иногородние. Количество местных мальчиков составляет четыре пятых количества иногородних девочек. Сколько в этом классе иногородних мальчиков?

Решение

Составим таблицу, обозначив через x количество иногородних девочек, через D – множество всех девочек, через G – множество всех местных. Тогда $\overline{D}$ – множество всех мальчиков, $\overline{G}$ – множество всех иногородних, $\frac{4}{5}x$ – количество местных мальчиков.

	G	$\overline{G}$	
D		x	20
$\overline{D}$	$\frac{4}{5}x$		
	18		33

На первом шаге можно заполнить четвёртую строку и четвёртый столбец.

	G	$\overline{G}$	
D		x	20
$\overline{D}$	$\frac{4}{5}x$		**13**
	18	**15**	33

Далее, ячейку на пересечении второй строки и второго столбца можно заполнить двумя способами – по строке и по столбцу. По строке: $20 - x$; по столбцу $18 - \frac{4}{5}x$.

	G	$\overline{G}$	
D	$20 - x$ и $18 - \frac{4}{5}x$	x	20
$\overline{D}$	$\frac{4}{5}x$		**13**
	18	**15**	33

Следовательно, имеет место уравнение: $20 - x = 18 - \frac{4}{5}x$. Его решение $x = 10$. Тогда:

	G	$\overline{G}$	
D	$20 - 10 = \mathbf{10}$	$x = \mathbf{10}$	20
$\overline{D}$	$\frac{4}{5}x = \mathbf{8}$		**13**
	18	**15**	33

Закончим заполнять таблицу и получим ответ на поставленный вопрос.

	G	$\overline{G}$	
D	$20 - 10 = \mathbf{10}$	$x = \mathbf{10}$	20
$\overline{D}$	$\frac{4}{5}x = \mathbf{8}$	**5**	**13**
	18	**15**	33

В этом классе 5 иногородних мальчиков.

338. Опрос, проведённый среди 52 мальчиков, показал, что 35 из них нравятся девочки, которые ходят в юбках, а 24 нравятся отличницы. Скольким мальчикам безразличны оба признака, если их число составляет четыре одиннадцатых от числа тех, кому нравятся отличницы в юбках?

339. Жили у дедуси
Восемнадцать гусей:
Десять белых,
Пять веселых –
Гуси у дедуси.

Сколько весёлых белых гусей было у дедуси, если их число составляет $\frac{2}{5}$ от числа тех гусей, которые не имеют ни одного из этих признаков?

13.9. Определение числа пятёрок за год

Задача

Количество пятёрок, которые за три года получил Знайка, равно 642. При этом количество пятёрок за первый год равно $\frac{6}{7}$ от их количества за второй год. В то же время количество пятёрок за третий год больше их количества за второй год на 20%. Сколько пятёрок за первый год получил Знайка?

Решение

Обозначив через x количество пятёрок за второй год, получим, что за первый год их было $\frac{6}{7}x$, а за третий год: $x + 0{,}2x = 1{,}2x$.

(Напоминаем, что слово «процент» означает «сотая часть». Следовательно, 20% = 0,2).

Тогда имеет место уравнение $\frac{6}{7}x + x + 1{,}2x = 642$. Запишем 1,2 в виде обыкновенной дроби: $1{,}2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$, и так как НОК (7; 1; 5) = 35, получим

$$\frac{6 \cdot 5}{7 \cdot 5}x + \frac{35}{35}x + \frac{6 \cdot 7}{5 \cdot 7}x = \frac{30 + 35 + 42}{35}x = \frac{107}{35}.$$

Тогда $\frac{107}{35}x = 642$ и отсюда следует:

$$x = 642 : \frac{107}{35} = \frac{642 \cdot 35}{1 \cdot 107} = \frac{6 \cdot 35}{1 \cdot 1} = 210.$$

Итак, во второй год было 210 пятёрок, а в первый год:

$$\frac{6}{7}x = \frac{6}{7} \cdot 210 = \frac{6 \cdot 210}{7 \cdot 1} = \frac{6 \cdot 30}{1 \cdot 1} = 180.$$

340. Сурия, Зарина и Эльмира проверили 542 контрольные работы. Количество работ, проверенных Сурией, составляет $1\frac{1}{9}$ от работ Зарины, а Эльмира проверила на 10% меньше, чем Зарина. Сколько работ проверила каждая из них?

341. В маленькой бочке было в $\frac{8}{15}$ раз меньше воды, чем в средней, а в большой бочке на 15% больше воды, чем в средней. Всего в 3 бочках было 80,5 литра воды. Сколько воды было в большой бочке?

13.10. Число книг в шкафах

Задача

Наташа утверждает, что в трёх шкафах имеются 159 книг. При этом количество книг в первом шкафу составляет $\frac{123}{200}$ от количества книг во втором, количество книг в третьем на 3,5% больше, чем во втором. Сколько книг во втором шкафу?

Решение

Обозначим через x количество книг во втором шкафу.

Тогда $\frac{123}{200}x$ – это количество книг в первом, а $1{,}035x$ – количество книг в третьем шкафу.

В результате получим уравнение $\frac{123}{200}x + x + 1{,}035x = 159$.

В левой части уравнения запишем:

$$\frac{123}{200}x + x + \frac{1035}{1000}x = \frac{123}{200}x + \frac{200}{200}x + \frac{207}{200}x = \frac{123 + 200 + 207}{200}x = \frac{53}{20}x$$

Следовательно, $\frac{53}{20}x = 159$. Поэтому

$$x = 159 : \frac{53}{20} = \frac{159 \cdot 20}{1 \cdot 53} = \frac{3 \cdot 20}{1 \cdot 1} = 60.$$

Итак, мы выяснили, что во втором шкафу 60 книг. Всё хорошо и можно закончить решение задачи?

К сожалению, нет. В условия задачи закралась ошибка. Несложно посчитать, что количество книг в первом шкафу:

$$\frac{123}{200}x = \frac{123}{200} \cdot 60 = \frac{123 \cdot 3}{10} = 36{,}9,$$

а $1{,}035x = 62{,}1$ – количество книг в третьем шкафу. Но количество книг не может быть нецелым числом. Следовательно, задача решения не имеет. Видимо, Наташа где-то ошиблась.

342. Эсен утверждает, что в трёх ящиках хранятся 42 банки. При этом количество банок в первом ящике составляет $\frac{2}{3}$ от количества банок во втором, а количество банок во втором ящике на 5 банок больше, чем в третьем. Сколько банок в третьем ящике?

343. Элиза утверждает, что два букета составлены из 24 цветков. При этом число цветков в первом букете составляет $\frac{4}{7}$ от количества цветков во втором. Сколько цветков в каждом букете?

13.11. Определение дроби по её числителю и знаменателю

Задача

Знаменатель дроби равен удвоенному числителю. Если и к числителю, и к знаменателю прибавить 5, то числитель будет равен утроенному знаменателю. Определите эту дробь.

Решение

Если обозначить числитель через x, то знаменатель будет равен $2x$. Дробь, у которой числитель будет равен утроенному знаменателю, равна $\frac{3}{1}$. Поэтому имеет место уравнение $\frac{x+5}{2x+5} = \frac{3}{1}$, которое можно рассматривать как пропорцию $\frac{x+5}{2x+5} = \frac{3}{1}$. Тогда по основному свойству пропорций: $(x + 5) \cdot 1 = (2x + 5) \cdot 3$.

В полученном уравнении раскроем скобки: $x + 5 = 6x + 15$, приведём подобные члены: $-5x = 10$ и получим $x = -2$. Следовательно, искомая дробь $\frac{(-2)}{(-4)}$.

Результат можно проверить по условиям задачи: добавляем и к *числителю*, и к *знаменателю* 5: $\frac{(-2)+5}{(-4)+5} = \frac{3}{1}$ и получаем требуемое.

344. Знаменатель дроби равен утроенному числителю. Если и от числителя, и от знаменателя отнять 6, то числитель будет меньше знаменателя в пять раз. Определите эту дробь.

345. Знаменатель дроби равен упятерённому числителю. Если и к числителю, и к знаменателю прибавить 4, то числитель будет меньше знаменателя в три раза. Определите эту дробь.

13.12. Деление в заданном отношении

Задача

У Эльнуры 1146 орешков в двух мешках. Сколько орешков в каждом мешке, если числа орешков в мешках находятся в отношении $7{,}8 : 8\frac{4}{7}$?

Решение

Условия задачи нужно понимать следующим образом. Если через x обозначить число орешков, которое соответствует одной части, то в первом мешке будет $7{,}8x$ орешков, во втором мешке будет $8\frac{4}{7}x$ орешков, а общее число орешков равно $7{,}8x + 8\frac{4}{7}x$.

Следовательно, имеет место уравнение $7{,}8x + 8\frac{4}{7}x = 1146$.

Выполнив сложение в левой части уравнения

$\frac{78}{10} + 8\frac{4}{7} = \frac{39}{5} + \frac{60}{7} = \frac{39 \cdot 7}{5 \cdot 7} + \frac{60 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{273+300}{35} = \frac{573}{35}$, получим

$\frac{573}{35}x = 1146$. Отсюда следует:

$$x = 1146 : \frac{573}{35} = \frac{1146 \cdot 35}{1 \cdot 573} = \frac{2 \cdot 35}{1 \cdot 1} = 70.$$

Поэтому выяснилось, что в первом мешке было: $7{,}8x = 7{,}8 \cdot 70 = 546$ орешков, а во втором мешке: $8\frac{4}{7}x = \frac{60}{7} \cdot 70 = 600$ орешков.

346. Эрмек определил, что в две коробки упаковано 488 бананов, при этом количество бананов в коробках находится в отношении $9{,}1 : 7\frac{1}{6}$. Сколько бананов в каждой коробке?

347. У Эркина 147 альчиков в двух мешочках. Сколько альчиков в каждом мешочке, если количество альчиков в мешочках находится в отношении $7 : 9\frac{1}{3}$?

13.13. Деление на три части в заданных отношениях

Задача

Сайкал, Бурул и Надира нашли клад, в котором было 4092 монеты и поделили его в отношении $8 : 7{,}2 : 4\frac{2}{7}$. Сколько монет досталось Бурул?

Решение

Согласно сказанному при решении предыдущей задачи, имеет место уравнение $8x + 7{,}2x + 4\frac{2}{7}x = 4092$.

Выполнив сложение в левой части уравнения:

$$\frac{8}{1} + \frac{72}{10} + 4\frac{2}{7} = \frac{8}{1} + \frac{36}{5} + 4\frac{30}{7} = \frac{8 \cdot 35}{1 \cdot 35} + \frac{36 \cdot 7}{5 \cdot 7} + \frac{30 \cdot 5}{7 \cdot 5} =$$

$$= \frac{280 + 252 + 150}{35} = \frac{682}{35}, \text{ получим } \frac{682}{35}x = 4092.$$

Отсюда следует: $x = 4092 : \frac{682}{35} = \frac{4092 \cdot 35}{1 \cdot 682} = \frac{6 \cdot 35}{1 \cdot 1} = 210.$

Следовательно, Бурул получила: $7{,}2x = 7{,}2 \cdot 210 = 1512$ монет.

348. У Бакая три отары, в которых всего 1846 овец. Сколько овец в третьей отаре, если число овец в отарах находится в отношении $11 : 6{,}8 : 8\frac{4}{7}$?

349. Темирлан, Айдана и Гульзина поделили 2902 юаня в отношении $7 : 8{,}3 : 5\frac{3}{7}$. Сколько юаней досталось Айдане? (Юань – китайские деньги.)

13.14. Определение стороны треугольника через его периметр

Задача

Первая сторона треугольника меньше второй на $\frac{2}{3}$ дециметра, вторая на 6 сантиметров меньше третьей, периметр треугольника 1,2 метра. Чему равна третья сторона треугольника (в сантиметрах)?

Решение

Обозначив длину второй стороны через x *см* и вспомнив о том, что в одном дециметре 10 *см*, а в одном метре 100 *см*, получим, что первая сторона имеет длину $\left(x - \frac{20}{3}\right)$ *см*, третья сторона $(x + 6)$ *см*, периметр равен 120 *см*.

Периметр многоугольника есть сумма длин его сторон. Поэтому имеет место уравнение $\left(x - \frac{20}{3}\right) + x + (x + 6) = 120$.

В полученном уравнении раскроем скобки и соберём неизвестные величины слева, а известные – справа: $3x = 120 + \frac{20}{3} - 6$.

В правой части уравнения стоит число:

$$120 - 6 + \frac{20}{3} = \frac{114}{1} + \frac{20}{3} = \frac{114 \cdot 3 + 20}{3} = \frac{362}{3}.$$

Следовательно, наше уравнение можно записать в виде $3x = \frac{362}{3}$.

Отсюда следует: $x = \frac{362}{3} : 3 = \frac{362 \cdot 1}{3 \cdot 3} = \frac{362}{9} = 40\frac{2}{9}$.

Итак, выяснилось, что третья сторона треугольника равна $46\frac{2}{9}$ *см*.

Решите теперь эту же задачу ещё двумя способами, обозначив через x сперва первую, затем третью стороны треугольника.

350. Одна сторона прямоугольника меньше другой на $4\frac{7}{9}$ дециметра, периметр прямоугольника 2 метра. Чему равны стороны прямоугольника (в дециметрах)? Решите эту задачу двумя способами: обозначив через x сперва длину, затем ширину.

351. Первая сторона треугольника больше второй на $5\frac{5}{7}$ метра, вторая на 360 сантиметров меньше третьей, периметр треугольника 22 метра. Чему равны стороны треугольника (в метрах)? Решите эту задачу тремя способами: обозначая через x поочерёдно каждую из трёх сторон треугольника.

13.15. Площадь и периметр прямоугольника

Задача

Длина прямоугольника на $4\frac{4}{9}$ метра больше ширины, а упятерённая ширина на 3 метра меньше периметра прямоугольника. Чему равна площадь прямоугольника?

Решение

Обозначив ширину через x и преобразовав дробь $4\frac{4}{9}$, получим, что длина прямоугольника равна $x + \frac{40}{9}$.

Тогда периметр равен $2\left(x + x + \frac{40}{9}\right) = 4x + \frac{80}{9}$.

Следовательно, имеет место уравнение: $4x + \frac{80}{9} - 3 = 5x$.

Так как $\frac{80}{9} - 3 = \frac{80 - 3 \cdot 9}{9} = \frac{53}{9}$, получаем $x = \frac{53}{9}$.

Итак, ширина прямоугольника равна $\frac{53}{9}$,

а длина: $x + \frac{40}{9} = \frac{53}{9} + \frac{40}{9} = \frac{93}{9} = \frac{31}{3}$.

Поэтому площадь прямоугольника равна $\frac{53}{9} \cdot \frac{31}{3} = \frac{1643}{27} = 60\frac{23}{27}$ $м^2$.

Решите теперь эту же задачу, обозначив через x длину прямоугольника.

352. Длина прямоугольника на $\frac{3}{7}$ сантиметра больше ширины, а утроенная длина на 0,4 сантиметра больше периметра прямоугольника. Чему равна площадь прямоугольника?

353. Длина прямоугольника на $\frac{2}{9}$ сантиметра больше ширины, а удвоенная ширина на 3 сантиметра меньше периметра прямоугольника. Чему равна площадь прямоугольника?

354. Сочините две задачи, подобные задачам, рассмотренным в данном параграфе.

1. Решите уравнения.

a) $2x = \frac{2}{3}$

b) $3x - 9 = 4$

c) $3x + 8 = 6x$

d) $5x = 18 - 2x$

e) $4\frac{2}{9}x = 3x + 2$

f) $5 - 7x + 4x = 4\frac{4}{7}$

g) $3\left(x - \frac{4}{19}\right) = 2$

h) $2\frac{1}{6}(x - 8) = x - 4,5$

i) $4x - \frac{4}{9} = \frac{5}{6} + 2x$

j) $3\frac{3}{7}\left(\frac{4}{9}x - \frac{7}{12}\right) = \frac{5}{42}$

k) $15(x - 2) = 45\frac{60}{91}$

2. В двух кассах стадиона продали 5920 билетов. Сколько билетов было продано в каждой кассе, если в первой продали на $\frac{6}{17}$ больше?

3. Бекназар купил корову и овцу. По какой цене он купил овцу, если эта цена равнялась $\frac{2}{13}$ цены коровы? Известно, что у него было 75000 сомов, а после этих покупок осталось 15000 сомов.

4. Марина и Стёпа за неделю просидели за компьютером 45 часов. Сколько часов провёл у компьютера Стёпа, если его время на $3\frac{2}{3}$ часа больше?

5. Шла стая уток, а навстречу ей серый гусь. Гусь говорит: «Здравствуйте, 100 уток!» А ему в ответ: «Если говорить без шуток, то, если бы была такая же стая, да еще $\frac{1}{6}$ стаи, то и тогда не хватало бы 9 до 100». Сколько уток было в стае?

6. Количество альчиков у Азима составляло $\frac{7}{15}$ количества альчиков у Филиппа. После того как Филипп проиграл Азиму 1 альчик, их у него осталось в 2 раза больше, чем у Азима. Сколько альчиков было у каждого?

7. У Кати, Тони и Асель 1272 сомов. При этом у Тони $\frac{10}{7}$ количества денег Кати, а у Асель на 84 сома больше, чем у Тони. Сколько сомов у Асель?

8. На свитер, шапку и шарф израсходовали 544 грамма шерсти. При этом на шапку ушло $\frac{3}{17}$ шерсти, израсходованной на свитер, и на 8 граммов больше, чем на шарф. Сколько шерсти израсходовали на свитер?

9. У одного араба спросили, сколько у него денег. Он ответил: «Мои деньги составляют $\frac{2}{3}$ денег моего брата, деньги брата составляют $\frac{2}{3}$ денег отца, деньги отца – как $\frac{2}{3}$ денег деда, а у всех нас миллион и еще двадцать пять дирхемов. Вот и узнайте, сколько у меня денег». (Дирхем – арабская монета.)

10. На доске написано некоторое число. Асыл увеличила это число на 7, а Чоро уменьшил на 3. Результат Чоро составил $\frac{13}{23}$ результата Асыл. Какое число было написано на доске?

11. На доске написано некоторое число. Айдай увеличила это число в 8 раз, а Нарынбек увеличил на 3. Результат Айдай оказался на $\frac{1}{12}$ меньше. Какое число было написано на доске?

12. Три богатыря нашли клад, в котором было 1608 монет и поделили в отношении $6:7{,}2:4\frac{2}{3}$. Сколько монет досталось второму богатырю?

13. У Максата 3 отары, в которых всего 510 овец. Сколько овец в третьей отаре, если число овец в отарах находится в отношении $9{,}1:6{,}9:8\frac{2}{7}$.

14. Одна сторона прямоугольника меньше другой на $1\frac{7}{8}$ сантиметра, периметр прямоугольника 25 сантиметров. Чему равны стороны прямоугольника?

15. Первая сторона треугольника больше второй в $\frac{9}{7}$ раза, вторая на 31 *мм* меньше третьей, периметр треугольника 33 сантиметра. Чему равны стороны треугольника (в сантиметрах)?

16. Длина прямоугольника на $1\frac{7}{18}$ метра больше ширины, а утроенная длина на 23 дециметра больше периметра прямоугольника. Чему равна площадь прямоугольника?

§ 14. Средние значения: среднее арифметическое. Мода. Медиана

14.1. Введение

Задача

Арстан, Кубат и Тураш играли в альчики. Когда игра закончилась, обнаружилось, что у ребят осталось одинаковое количество альчиков. Какими были итоги игры для каждого, если в начале игры у Арстана было 20, у Кубата 12, у Тураша 19 альчиков?

Решение

В начале игры у Арстана, Кубата и Тураша было всего $20 + 12 + 19 = 51$ альчик. В конце игры у каждого было одинаковое количество альчиков, то есть по $51 : 3 = 17$ альчиков. Следовательно, Арстан проиграл $(17 - 20 = -3) = 3$ альчика, Кубат выиграл $(17 - 12 = 5) = 5$ альчиков, Тураш проиграл $(17 - 19 = -2) = 2$ альчика.

Число 17, найденное в процессе решения задачи, является средним арифметическим для тройки чисел (20; 12; 19).

355. Арген, Сабира и Эркингуль собрали 5,2 килограмма, 7,4 килограмма и 2,1 килограмма смородины соответственно. Найдите среднее арифметическое.

356. На следующий день к ним присоединилась Джумагуль. Они собрали 2,3 килограмма, 4,2 килограмма, 3,3 килограмма и 5,5 килограмма малины соответственно. Чему равно среднее арифметическое для этих чисел?

357. Айнура сделала покупки на 238 сомов, Бексултан на 724 сома, Виталий на 397 сомов. Найдите среднее арифметическое расходов на покупки.

358. Габит весит 72,4 *кг*, Сауле весит 51 *кг* 30 *г*, вес Лены составляет 55 *кг*, а вес Джээнбека 68 *кг* 58 *г*. Чему равно среднее арифметическое этих чисел?

14.2. Определение среднего арифметического

Надеемся, что вы успешно справились с упражнениями. Давайте сформулируем, что такое среднее арифметическое, а также правило для его вычисления.

Если имеются несколько чисел: a_1, a_2, ..., a_N, то, разделив их сумму на количество N, получим число, которое называется **средним арифметическим** этих чисел.

Обычно, среднее арифметическое обозначают греческой буквой μ – «мю».

На языке формул определение выглядит следующим образом:

$$\mu = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_N}{N}.$$

Очевидно, чем больше N при одном и том же значении μ, тем полезнее соответствующее произведённое исследование, в качестве которого может быть и измерение значений каких-либо физических, геометрических и прочих величин, а также анализ социально-экономических показателей, например, расчёт средней месячной зарплаты по нескольким семьям по разным группам населения. Понятно, что даже в случае одинаковой средней зарплаты в двух случаях – для групп из 10 семей и из 1000 семей – исследования во втором случае являются более информативными.

Задача

Вычислите среднее арифметическое для чисел:

a) 17; 21; 12; 15; 12.

b) 12917; 12921; 12912; 12915; 12912.

c) 7; 11; −12; 0; 7; −5.

d) 917523; −873511; 324902; 14; −324902; −917523; 873511.

e) 11; 14; 17; 20; 23; 26; 29.

f) $23\frac{1}{3}$; $-14\frac{2}{7}$; $\frac{5}{11}$.

Решение

a) $\mu = \frac{17 + 21 + 12 + 15 + 12}{5} = \frac{77}{5} = 15{,}4$. Число 12 в исходных данных встречается дважды, поэтому и в сумму оно включено дважды.

b) Можно мужественно сложить все числа:

12917 + 12921 + 12912 + 12915 + 12912 = 64577,

затем разделить на 5 и узнать, что $\mu = 12915{,}4$. Все будет гораздо проще, если увидеть, что первое число есть 12900 + 17; второе есть 12900 + 21 и так далее. Поэтому среднее арифметическое будет суммой числа 12900 и числа, являющегося средним арифметическим для чисел 17; 21; 12; 15; 12, которое, как мы знаем из предыдущего пункта, равно 15,4. Таким образом, $\mu = 12900 + 15{,}4 = 12915{,}4$.

c) При вычислении среднего арифметического нужно обязательно учитывать знак каждого числа. В данном случае

$$\mu = \frac{7 + 11 + (-12) + 0 + 7 + (-5)}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

d) Перед выполнением любого задания нужно внимательно прочитать условия. Конечно, затратив некоторое количество времени и сил, можно найти сумму данных семи чисел и затем узнать, что среднее арифметическое равно 2. Но этот результат получится сразу, если заметить, что каждое из чисел, за исключением 14, встречается дважды: один раз со знаком «плюс» и один раз со знаком «минус». Поэтому сумма этих семи чисел равна 14, и, как следствие, среднее арифметическое равно 2.

e) Последовательно складывая, найдем сумму данных чисел:

$11 + 14 = 25;$

$25 + 17 = 42;$

$42 + 20 = 62;$

$62 + 23 = 85;$

$85 + 26 = 111;$

$111 + 29 = 140.$

Теперь разделим полученную сумму на количество чисел и получим среднее арифметическое: $\mu = 140 : 7 = 20$.

Более красивое и, главное, менее трудоемкое решение задачи можно получить, заметив, что сумма первого и последнего слагаемых равна: $11 + 29 = 40$. Как следствие, их среднее арифметическое равно 20. То же самое можно сказать про второе и предпоследнее слагаемые и так далее. Без пары остается среднее число, но оно равно 20. Отсюда получаем, что среднее арифметическое 20.

f) Нахождение суммы $23\frac{1}{3} + \left(-14\frac{2}{7}\right) + \frac{5}{11}$ упростится, если вспомнить, что запись $23\frac{1}{3}$ означает $23 + \frac{1}{3}$, а $14\frac{2}{7} = 14 + \frac{2}{7}$.

Следовательно,

$$23\frac{1}{3} + \left(-14\frac{2}{7}\right) + \frac{5}{11} = 23 + \frac{1}{3} - (14 + \left(14 + \frac{2}{7}\right) + \frac{5}{11} =$$

$$= 23 - 14 + \frac{1}{3} - \frac{2}{7} + \frac{5}{11} = 9 + \frac{77 - 66 + 105}{3 \cdot 7 \cdot 11} = 9 + \frac{116}{231} = 9\frac{116}{231}.$$

Разделив $9\frac{116}{231}$ на 3, получим ответ:

$$9\frac{116}{231} : 3 = \left(9 + \frac{116}{231}\right) : 3 = 9 : 3 + \frac{116}{231} : 3 = 3 + \frac{116}{231 \cdot 3} = 3\frac{116}{693}.$$

359. Вычислите среднее арифметическое для чисел:

a) 73; 91; 66; 230;

b) 813 094; 813 061; 813 100; −813 055;

c) $7\frac{1}{2}$; $-6\frac{5}{7}$;

d) 283 217; 754 721; −283 215; −911; 900; −754 700;

e) 4; 8; 12; 16; 20; 24;

f) $11\frac{1}{7}$; $12\frac{3}{5}$; $-5\frac{2}{3}$.

360. Вычислите среднее арифметическое для чисел:

a) 5; 11; 32; 5; 24; 7;

b) 79 807; 79 821; 79 812; 79 815; 79 802;

c) −7; 12; −16; 20; 17; −5;

d) 729 123; 658 735; −729 123; 543 924; 672 492; −658 743; −543 924; −672 492;

e) −21,1; 19,42; −105,2; 82,32;

f) $7\frac{1}{4}$; 5; $-2\frac{1}{3}$; $6\frac{1}{6}$.

Замечание

Обычно, говоря о *среднем*, имеют в виду среднее арифметическое.

14.3. Среднее арифметическое двух чисел

Задача

Среднее арифметическое число девочек в 6 «А» и 6 «Б» классах равно 12,5. Сколько всего девочек в этих двух классах?

Решение

Может показаться, что в условие задачи вкралась ошибка. Как это так: 12,5 – ведь половины девочки не бывает. На самом деле можно не волноваться по этому поводу. Всё в порядке, так как речь идет о среднем арифметическом. Поэтому 12,5 может получиться, если в 6 «А» 10, а в 6 «Б» 15 девочек, или 17 девочек в 6 «А» и 8 в 6 «Б», и во многих других подобных случаях.

Понятно, что ответ на вопрос задачи найти очень просто.

$12{,}5 \cdot 2 = 25$ девочек учатся в 6 «А» и 6 «Б» классах.

Если известно μ – среднее арифметическое N чисел, то сумма этих чисел равна произведению μN.

361. Среднее арифметическое N чисел равно μ. Чему равна сумма этих N чисел?

a) $N = 12$; $\mu = 16$

b) $N = 11$; $\mu = -22{,}22$

c) $N = 15$; $\mu = 8\frac{1}{3}$

d) $N = 17$; $\mu = 2\frac{1}{7}$.

362. Среднее арифметическое N чисел равно μ. Чему равна сумма этих N чисел?

a) $N = 11$; $\mu = 17$

b) $N = 9$; $\mu = -7{,}89$

c) $N = 8$; $\mu = 3\frac{3}{4}$

d) $N = 7$; $\mu = 11\frac{1}{9}$.

14.4. Среднее арифметическое трёх чисел

Задача

Среднее арифметическое числа мальчиков, которые учатся в 6 «В», 6 «Г» и 6 «Д» классах равно 13,3. Сколько всего мальчиков в этих трёх классах?

Решение

Кажется, что ответ найти очень легко: $13{,}3 \cdot 3 = 39{,}9$. Но здравый смысл должен подсказать, что здесь имеется ошибка – число мальчиков не может быть дробным. Видимо, в условиях задачи есть ошибка.

363. Золушка вырастила 4 тыквы, средний вес которых 3,4 *кг*. Чему равен их общий вес?

364. Кымбат подсчитала, что её куры в среднем снесли за месяц по 18,75 яиц. Сколько всего яиц снесли куры, если их 14? Почему эта задача неправильная? Можно ли сказать то же самое про задачу 363?

365. Ксения принесла домой три пакета макарон. Сколько всего макарон она принесла, если средний вес пакета 1,25 *кг*?

366. Нюра принесла на базар четыре корзины с яйцами. В каждой корзине в среднем 33,4 яйца. Сколько всего яиц принесла Нюра? Почему эта задача неправильная? Можно ли сказать то же самое про задачу 365?

367. Измените условия задач 364 и 366 так, чтобы они стали правильными. Например, укажите, что Нюра принесла не четыре, а пять корзин с яйцами.

14.5. Определение числа по среднему арифметическому

Задача

Средний возраст 11 футболистов команды «Омега» был равен 26 годам. После того как судья удалил с поля одного из них, средний возраст футболистов команды «Омега» стал 25 лет. Каков возраст удалённого игрока?

Решение

Общий возраст 11 футболистов команды «Омега» равен $26 \cdot 11 = 286$ годам. В то же время общий возраст оставшихся на поле футболистов равен $25 \cdot 10 = 250$ годам. Стало быть, возраст удаленного игрока равен: $286 - 250 = 36$ годам.

368. Средний возраст 9 участников танцевального кружка был 12,4 года. После того как к ним присоединилась Айбике, он стал 12,26. Сколько лет Айбике?

369. Шесть девочек играли в куклы. После того как Айжаркын позвали домой и она унесла 7 своих кукол, среднее число кукол у оставшихся девочек стало равно 5,8. Чему было равно среднее число кукол до ухода Айжаркын?

14.6. Алгебраическое определение числа по среднему арифметическому

Задача

По итогам четверти выяснилось, что Света получила 53 пятёрки, а Асель получила 40 пятёрок. Узнайте, сколько пятёрок получила Чолпон, если известно, что среднее арифметическое для числа пятёрок, полученных тремя девочками, равно 48.

Решение

Обозначив через x число пятёрок, полученных Чолпон, получим уравнение

$$\frac{53 + 40 + x}{3} = 48.$$

Тогда $93 + x = 3 \cdot 48$; $x = 144 - 93 = 51$ пятёрка.

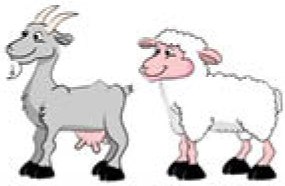
370. Айпери, Джибек и Фариза, готовясь к экзамену, решили в среднем по 12 задач. При этом Айпери решила 7 задач, Джибек решила 9. Сколько задач решила Фариза?

371. Среднее число опозданий на занятия у Динуры, Гали, Томы и Чинары за четверть равно 7. Известно, что Динура опаздывала 8 раз, Тома опоздала 9 раз, Чинара опаздывала 10 раз. Сколько раз опоздала Галя?

14.7. Использование среднего арифметического для определения веса

Задача

У Абдуллы 5 овец и 2 козы, при этом вес овцы на 7 килограммов больше веса козы. Определите вес овцы и вес козы, зная, что средний вес животных Абдуллы равен 43 килограмма.



Решение

Обозначив через x вес овцы, получим уравнение $\frac{5x + 2(x - 7)}{7} = 43$.

Тогда $7x = 43 \cdot 7 + 14$; $x = \frac{315}{7} = 45$ *кг*. Итак, мы выяснили, что вес овцы 45 *кг*, вес козы: $45 - 7 = 38$ *кг*.

372. Бурул принесла на рынок 4 индюка и 6 куриц, средний вес которых 3,1 *кг*. Известно, что вес индюка на 1 *кг* 50 граммов больше веса курицы. Определите вес индюка.

373. У Халиды 15 кур и 7 уток, при этом вес утки на 440 граммов больше веса курицы. Определите вес утки и вес курицы, зная, что средний вес птиц Халиды равен 4,2 килограмма.

14.8. Изменение среднего арифметического

Задача

На полках магазина 21 пакет с мукой по 1 килограмму и 11 пакетов с мукой по 2 килограмма. Определите средний вес пакета с мукой. Как изменится ответ после того как будут проданы 7 пакетов с мукой по 1 килограмму?

Решение

Некоторые могут сказать, что в обоих случаях ответ одинаковый: так как имеются одно и двухкилограммовые пакеты, среднее арифметическое равно $\frac{1+2}{2} = 1{,}5$ *кг*.

Но вы, конечно, понимаете, что думать так – грубая ошибка.

Конечно, нужно принимать во внимание количество пакетов. Итак, в начальной ситуации среднее арифметическое равно

$\frac{21 \cdot 1 + 11 \cdot 2}{21 + 11} = \frac{43}{32} = 1\frac{11}{32} = 1{,}34375$ *кг*, а затем

$\frac{14 \cdot 1 + 11 \cdot 2}{14 + 11} = \frac{36}{25} = 1\frac{11}{25} = 1{,}44$ *кг*.

Замечание

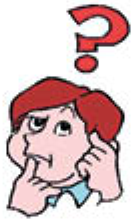
Для того чтобы подчеркнуть важность количества пакетов, в этом и других подобных ситуациях часто говорят о **средневзвешенном арифметическом значении**. Отметим, что в статистике термины среднее арифметическое значение и средневзвешенное арифметическое значение являются синонимами, то есть эти термины равноправны.

374. На складе было 12 мешков сахара весом 45 *кг* и 8 мешков сахара весом 50 *кг*. Определите средний вес мешка. Как изменился ответ после того как на склад привезли 5 мешков весом по 45 *кг*?

375. В третьей четверти Даша получила 52 пятёрки, 19 четвёрок и 9 троек. Двоек не было. Какова средняя оценка Даши?

14.9. Средневзвешенное значение

Задача



Эндрю поручил Таланту определить средний вес студентов четырёх подразделений. Через короткий промежуток времени Талант принес результат. Эндрю очень удивился. «Как ты сумел так быстро справиться с заданием?» – спросил он. Талант ответил, что всё получилось очень быстро, потому что у него были результаты по каждому подразделению.

Давайте и мы выполним это задание.

Итак, пусть в подразделении «Альфа» 82 студента, средний вес которых 57,5 *кг*; 63 студента в «Бета» со средним весом 59 *кг*; средний вес 38 студентов подразделения «Гамма» составил 61,25 *кг* и 47 студентов в «Тэта», средний вес которых 64 *кг*.

Решение

Несложно определить общий вес студентов каждого подразделения:

«Альфа» $82 \cdot 57{,}5 = 4715$ *кг*;

«Бета» $63 \cdot 59 = 3717$ *кг*;

«Гамма» $38 \cdot 61{,}25 = 2327{,}5$ *кг*;

«Тэта» $47 \cdot 64 = 3008$ *кг*. Тогда общий вес студентов всех четырех подразделений: $4715 + 3717 + 2327{,}5 + 3008 = 13767{,}5$ *кг*.

Разделив полученное число на количество студентов:

$82 + 63 + 38 + 47 = 230$, получим ответ: 59,86 *кг*. (Мы округлили результат.)

Итак, мы выяснили, что Талант сообщил Эндрю число 59,86 – средний вес студентов четырёх подразделений.

376. В 6 «Б» классе 13 девочек и 14 мальчиков. По итогам третьей четверти средняя оценка у девочек равна 4,2; у мальчиков 3,9. Какова средняя оценка учащихся 6 «Б» класса?

377. Средняя оценка 24 учеников 6 «А» класса за вторую четверть 4,25. В 6 «Б» классе 27 учеников, средняя оценка 4. В 6 «В» классе 22 ученика, средняя оценка $3\frac{7}{11}$. Какова средняя оценка по всем трём шестым классам?

14.10. Сравнение средних арифметических

Рассказывают, что как-то встретились жители двух аилов, разговорились. Житель аила Тегизчил сказал, что у них 21 двор, в среднем в каждом дворе по 33 овцы и 12 лошадей. В ответ житель аила Жапкап сказал, что в его аиле живут лучше, так как у них 26 дворов и в среднем по 40 овец и 15 лошадей.

Задача

Проверьте правильность озвученных чисел, зная, что в Тегизчил, в первом дворе 3 овцы и 22 лошади, во втором дворе 6 овец и 21 лошадь, в третьем дворе 9 овец и 20 лошадей и т. д. В Жапкап в 25 дворах по 2 овцы и 1 лошади и в 26 дворах 990 овец и 380 лошадей.

Решение

Стоит заметить, что количества овец и лошадей в Тегизчил образуют арифметические прогрессии с разностью 3 и -1 соответственно. Поэтому средние арифметические равны количеству овец и лошадей в одиннадцатом дворе. Следовательно, в Тегизчил среднее арифметическое числа овец равно $3 + 3(11 - 1) = 33$; лошадей $22 + (-1) \cdot (11 - 1) = 12$.

Если вы не знакомы с прогрессиями, то это не беда. Ответ нетрудно получить в результате непосредственного вычисления.

Стоит заметить, что количество овец во втором дворе $3 + 3(2 - 1) = 6$; в третьем $3 + 3(3 - 1) = 9$; в четвёртом $3 + 3(4 - 1) = 12$...; в двадцатом $3 + 3(20 - 1) = 60$; в двадцать первом $3 + 3(21 - 1) = 63$. После этого можно увидеть, что среднее количество овец в двух дворах, первом и двадцать первом равно $\frac{3 + 63}{2} = 33$. То же самое получится для второго и двадцатого дворов $\frac{6 + 60}{2} = 33$ и так далее. Без пары будет одиннадцатый двор, но число овец в нём $3 + 3(11 - 1) = 33$.

Итак, в Тегизчил среднее арифметическое числа овец равно 33. Подобные рассуждения приводят к выводу, что среднее арифметическое числа лошадей равно 12.

В Жапкап всего $25 \cdot 2 + 990 = 1040$ овец и $25 \cdot 1 + 380 = 405$ лошадей. Следовательно, среднее арифметическое числа овец будет $\frac{1040}{26} = 40$; среднее арифметическое числа лошадей равно $\frac{405}{26} = 15\frac{15}{26} \approx 15{,}577$.

Мы выяснили, что житель аила Тегизчил был точен, житель Жапкапа слегка ошибся. А теперь, после того как мы имеем проверенные статистические данные, можете ли вы согласиться с утверждением, что в Жапкап живут лучше?

378. Вы планируете продать по одинаковой цене один из двух магазинов, которыми владеете. Анализ работы этих магазинов дал следующие числа.

Прибыль магазина «Альфа» в последние недели равнялась (в тыс. сомов) 55; 54; 51; 55; 53; 53; 54; 52. Прибыль магазина «Бета» 54; 53; 70; 54; 53; 50; 50; 52; 50. Определите среднее арифметическое для каждого магазина и примите решение о продаже.

379. Фермерское хозяйство решает выбрать один из двух сортов пшеницы для будущего сева. В прошлый раз традиционный сорт был посеян на 10 полях и дал урожай (в центнерах) 31; 29; 30; 33; 29; 30; 29; 31; 29; 33 с 1 гектара соответствующего поля. Новый сорт был посеян на 12 полях и показал следующие результаты: 33; 32; 31; 31; 32; 31; 29; 32; 32; 32; 13; 32. Определите средние значения для каждого сорта и выберите сорт.

14.11. Различные средние показатели

Узнав от президента фирмы о том, что в среднем заработная плата сотрудников фирмы равна $600, Исабек согласился начать работу, получая заработную плату $200.

Через несколько месяцев, освоившись и получив некоторую информацию, он пришёл к президенту и заявил: «Вы меня обманули. Почти все, кто работает рядом со мной, получают не $600, а $200». В ответ президент сказал: «Ну что вы? Я вам сказал правду. Возможно, вы не общались с большей частью сотрудников. В частности, я могу дополнительно сообщить, что не менее половины наших сотрудников получает не меньше $400». Через некоторое время Исабек снова пришёл к президенту и сказал: «Извините, но я не могу поверить в истинность ваших слов об уровне заработной платы. Я получил информацию от сотрудников, которые работают на вашу фирму много лет и их заработная плата далека от $400». После этих слов президент фирмы предъявил ведомость, в которой были указаны размеры заработной платы сотрудников фирмы.

Проверим истинность слов президента фирмы, используя данные из ведомости:

Президент – $4800, его брат – $2000, 6 родственников – по $500, 5 бригадиров – по $400, 10 работников – по $200.

Несложно увидеть, что формально президент прав. Среднее арифметическое заработных плат

$$\frac{1 \cdot 4800 + 1 \cdot 2000 + 6 \cdot 500 + 5 \cdot 400 + 10 \cdot 200}{23} = \frac{13800}{23} = 600,$$

из 23 сотрудников фирмы 13 получают $400 или больше.

В то же время, нетрудно увидеть, что число $600 определяется, в основном, относительно высокой зарплатой президента фирмы и его родственников. А для Исабека существенной является зарплата $200, которую получают 10 работников.

Эта и предыдущая задачи показывают, что, принимая во внимание только среднее арифметическое, можно часто делать ложные выводы или принимать неправильные решения.

В связи с этим наряду со средним арифметическим в статистике рассматривают медиану (Ме) и моду (Мо). В примере с Исабеком медиана равна $400, а мода $200.

Если найти сумму всех чисел, входящих в совокупность чисел, и разделить на их количество, то получится число μ, называемое **средним арифметическим значением**:

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Если упорядочить элементы числовой совокупности по возрастанию или убыванию, то число, стоящее точно в середине упорядоченного набора, называется **медианой**. Если количество элементов совокупности есть чётное число, то медиана равна среднему арифметическому значению двух чисел, стоящих в середине упорядоченного набора.

Число, которому равно максимальное количество элементов числовой совокупности, называется **модой**. Числовая совокупность может иметь несколько мод.

Воспользовавшись определением и условиями задачи 14.10, можно сказать, что для аила Тегизчил значения медиан числа овец и лошадей совпадает со значениями среднего арифметического: для овец 33, для лошадей 12. Так как числа, выражающие количества овец и лошадей в Тегизчил, не повторяются, каждое из них может считаться модой.

Для Жапкапа и мода, и медиана числа овец и числа лошадей равны соответственно 2 и 1.

380. Сравните показатели работы магазинов, вычислив моду и медиану каждого из них. Прибыль магазина «Альфа» в последние недели равнялась: 55; 54; 51; 55; 53; 53; 54; 52. Прибыль магазина «Бета»: 54; 53; 70; 54; 53; 50; 50; 52; 50 (в тыс. сом).

381. Сравните показатели урожайности двух сортов пшеницы, вычислив моду и медиану каждого из них. Традиционный сорт был посеян на 10 полях и дал урожай (в центнерах) 31; 29; 30; 33; 29; 30; 29; 31; 29; 33 с 1 гектара соответствующего поля. Новый сорт был посеян на 12 полях и показал следующие результаты: 33; 32; 31; 31; 32; 31; 29; 32; 32; 32; 13; 32.

14.12. Медиана для нечётного числа элементов

В этом и последующем пунктах более подробно поговорим о медиане.

Упорядочим элементы числовой совокупности с нечётным числом элементов в порядке возрастания или убывания. Элемент, стоящий в середине упорядоченного множества, называется медианой. В множестве, состоящем из N элементов, медиана будет иметь номер $\frac{N+1}{2}$.

Примечание

Термин **медиана** встречается в геометрии при изучении треугольников. В данном случае мы обсуждаем термин из статистики. Нетрудно заметить родственность этих понятий.

Задача

Определите значение медианы совокупности чисел.

a) {5; 7; 3; 4; −1}

b) {4; 1; −2; −5; 9; 0; 5}

c) {1,7; 2,6; −3,3; 3,3; −4,5}

d) {−2,3; −2,8; −3,3; −3,8; −2,8}

Решение

a) Упорядочив совокупность чисел {5; 7; 3; 4; −1} в виде −1; 3; 4; 5; 7, увидим, что значение медианы, которая стоит на третьем месте: $\frac{5+1}{2} = 3$, равно 4.

b) Совокупность чисел {4; 1; −2; −5; 9; 0; 5} имеет 7 элементов. Поэтому медиана стоит на четвёртом месте упорядоченного набора −5; −2; 0; 1; 4; 5; 9. То есть медиана равна 1.

c) Упорядочим совокупность чисел {1,7; −2,6; −3,3; 1,3; −4,5} и получим −4,5; −3,3; 1,7; −2,6; 3,3. Медиана равна 1,7.

d) Совокупность чисел можно упорядочить и по убыванию. Упорядочим совокупность {−2,3; −2,8; −3,3; −3,8; −2,8} подобным образом: −2,3; −2,8; −2,8; −3,3; −3,8. Тогда медиана равна −2,8.

382. Определите значение медианы совокупности чисел.

a) {23; 72; −33; 44; −31}

b) {−24; 32; 1/2; 6,5; −121; 17; −26}

c) {2,7; −2,36; −5,43; −13,13; −64,5}

383. Определите значение медианы совокупности чисел.

a) {51; 17; 33; −14; −1}

b) {14; 21; −12; −65; 21; 40; 56}

c) {−1,7; 2,16; −3,13; −3,13; −14,5}.

14.13. Медиана для чётного числа элементов

Вы наверно уже заметили, что рассматривались только множества с нечётным числом элементов. А что в случае чётного числа элементов?

> В случае чётного числа элементов число $\frac{N+1}{2}$ – номер медианы – будет расположено между натуральными числами $\frac{N}{2}$ и $\frac{N}{2} + 1$. Статистики договорились, что в этом случае значением медианы будет среднее арифметическое чисел, стоящих на местах с номерами $\frac{N}{2}$ и $\frac{N}{2} + 1$ в упорядоченном множестве.

Задача

Определите значение медианы совокупности чисел.

a) {15; 7; 1; 4; −1; −6}

b) {2; 11; −2; −15; 19; 0; 5; −4}

c) {7,7; 2,6; −3,3; 3,3; −4,5; 3,6}

Решение

a) Упорядочив набор {15; 7; 1; 4; −1; −6} в виде −6; −1; 1; 4; 7; 15, увидим, что на середине, на местах с номерами 3 и 4, стоят числа 1 и 4. Следовательно, значение медианы: $\frac{1+4}{2} = 2{,}5$.

b) Совокупность чисел {2; 11; −2; −15; 19; 0; 5; −4} имеет 8 элементов. Поэтому медиана определяется числами, стоящими на четвёртом и пятом местах упорядоченного набора −15; −4; −2; 0; 2; 5; 11; 19.

То есть медиана равна $\frac{0+2}{2} = 1$.

c) Упорядочим совокупность чисел {7,7; −2,6; −3,3; 1,3; −4,5; 3,6} и получим 7,7; 3,6; 1,3; −2,6; −3,3; −4,5.

Следовательно, медиана равна $\frac{1{,}3+(-2{,}6)}{2} = -0{,}65$.

384. Определите значение медианы совокупности чисел.

a) {0; 4/11; 7; −23; 4; −31}
b) {−4; −0,2; 1/21; 6; −1,21; −17; 11/2; 6}
c) {−2,17; −2,6; 0,43; −1,1; −1/4; −6,5}

385. Определите значение медианы совокупности чисел.

a) {5,1; 22; 17; 3,3; −14; −1}
b) {1,4; 21; −1,2; −6,5; 21; 1,40; 5,6; 7}
c) {11,7; 12,6; 6,5; −3,4; −3,13; 6,5}

14.14. Мода

Задача

Определите значение моды совокупности чисел.

a) {1; 7; 1; 4; 1; −6}

b) {2; 1; 2; 1; 1; 2; 5; 2}

c) {7; 7; 6; 3; 3; −4; 5; 6}

d) {−2; 8; −3; −8; 2}

Решение

a) Мода равна 1 – это число встречается чаще других элементов данной совокупности: три раза.

b) И в этой совокупности число 1 встречается три раза. Но оно не является модой, потому что число 2 встречается четыре раза.

c) Совокупность имеет три моды: числа 7; 6; 3. Каждое встречается по два раза – чаще других элементов данной совокупности.

d) Все элементы данной совокупности встречаются только по одному разу. В такой ситуации мы говорим, что каждый элемент является модой. Следовательно, имеется 5 мод.

Замечание

В тех случаях, когда каждый элемент встречается только один раз, иногда говорят, что совокупность чисел не имеет моды.

386. Определите значение моды совокупности чисел.

a) $\{0; 4; 7; 3; 4; -3\}$

b) $\{-4; 2; 2; 6; 1; 1; 1\}$

c) $\{-2; -6; 4; 1{,}1; 4; -6\}$

d) $\{-12; 8; 0; -8; 2\}$

387. Определите значение моды совокупности чисел.

a) $\{5; -2; 17; 3; 17; -1\}$

b) $\{1; 9; -1; -6; 1; 9; -1; 7\}$

c) $\{7; 5; 5; -3; 7; 5\}$

d) $\{-3; 4; -6; 0; -8; 9\}$

14.15. Мода и медиана

Задача

Ответьте на вопросы, подкрепив их соответствующими примерами.

a) Может ли набор из пяти чисел иметь ровно одну, две, три, четыре, пять мод?

b) Может ли набор из пяти чисел иметь ровно одну, две, три, четыре, пять медиан?

c) Верно ли утверждение: медиана всегда больше моды?

Решение

a) Одна, две и пять мод возможны. Соответствующие примеры: $\{1; 1; 4; 1; -6\}$, $\{1; 1; 4; 1; 4\}$, $\{1; 11; 4; -1; -6\}$. Три и четыре моды невозможны. Так, чтобы были три моды, три элемента должны встретиться хотя бы по два раза, а для этого нужно не менее 6 элементов.

b) Медиана у каждой совокупности чисел только одна.

c) Медиана может быть больше моды, меньше моды или равна моде. Соответствующие примеры:

{2; 2; 3; 4; 5} – медиана 3 больше моды 2;
{1; 2; 3; 4; 4} – медиана 3 меньше моды 4;
{1; 4; 4} – медиана 4 равна моде 4;
{1; 1; 4} – медиана 1 равна моде 1;
{1; 1; 4; 1; −6} – медиана 1 равна моде 1.

388. Ответьте на вопросы, подкрепив их соответствующими примерами.

a) Может ли набор из шести чисел иметь ровно одну, две, три, четыре, пять, шесть мод?

b) Верно ли утверждение: медиана всегда равна среднему арифметическому?

389. Ответьте на вопросы, подкрепив их соответствующими примерами.

a) Может ли набор из четырёх чисел иметь ровно одну, две, три, четыре моды?

b) Верно ли утверждение: мода всегда больше среднего арифметического?

14.16. Вычисление средних величин

Задача

Выручка и расходы магазина по итогам восьми месяцев составили (в млн сомов):

Месяцы	1	2	3	4	5	6	7	8
Выручка	6,7	9,2	11,2	8,6	10	9,2	10,1	8
Расходы	5,1	6,8	9,4	9,1	7,8	9,4	7,5	6,8

Определите среднее арифметическое, медиану и моду для a) выручки; b) расходов; c) прибыли (выручка минус расходы).

Решение

a) Если задача предусматривает и нахождение медианы, полезно начинать с ранжирования. Это облегчает определение моды и может упростить вычисление среднего арифметического. Итак, ранжированный набор показателей выручки:

Ранжированная выручка	6,7	8	8,6	9,2	9,2	10	10,1	11,2

Так как число элементов чётно, значение медианы является средним арифметическим элементов, стоящих на четвёртом и пятом местах: $\frac{9,2+9,2}{2}=9,2.$

После ранжирования легко видеть, что мода равна 9,2 и в данном случае совпадает с медианой.

Среднее арифметическое:

$$\mu=\frac{6,7+8+8,6+9,2+9,2+10+10,1+11,2}{8}=9,125.$$

b) Ранжированный набор показателей расходов:

Ранжированные расходы	5,1	6,8	6,8	7,5	7,8	9,1	9,4	9,4

Медиана: $\frac{7,5+7,8}{2}=7,65.$

После ранжирования несложно увидеть, что имеются две моды: 6,8 и 9,4.

Среднее арифметическое:

$$\mu=\frac{5,1+6,8+6,8+7,5+7,8+9,1+9,4+9,4}{8}=7,7375.$$

c) По определению, прибыль есть выручка без расходов. Поэтому ответ на вопросы задачи начнём с дополнения таблицы данных строкой, в которой запишем показатели прибыли каждого месяца:

Месяцы	1	2	3	4	5	6	7	8
Выручка	6,7	9,2	11,2	8,6	10	9,2	10,1	8
Расходы	5,1	6,8	9,4	9,1	7,8	9,4	7,5	6,8
Прибыль	1,6	2,4	1,8	−0,5	2,2	−0,2	2,6	1,2

Теперь действуем как в предыдущих пунктах. Ранжируем набор показателей:

Ранжированная прибыль	−0,5	−0,2	1,2	1,6	1,8	2,2	2,4	2,6

Тогда медиана: $\frac{1,6+1,8}{2}=1,7.$

Элементы не повторяются – поэтому каждая является модой.

Среднее арифметическое:

$$\mu=\frac{-0,5+(-0,2)+1,2+1,6+1,8+2,2+2,4+2,6}{8}=1,3875.$$

Обратите внимание на то, что это число равно разности чисел 9,125 и 7,7375, выражающих среднее арифметическое для выручки и расходов. Это случайность или нет? Имеет ли место подобное для моды и медианы?

390. Определите значения моды, медианы и среднего арифметического совокупности чисел, элементами которой являются числа, выражающие возраст членов вашей семьи.

391. Выясните рост семерых ваших друзей и подруг. Определите значения моды, медианы и среднего арифметического полученной совокупности чисел.

392. Сочините две задачи, подобные задачам, рассмотренным в данном параграфе.

1. В пяти играх испанского чемпионата знаменитый футболист «Барселоны» и сборной Уругвая Луис Суарес забил последовательно 4; 4; 2; 1; 2 гола. Чему равно среднее арифметическое для этих чисел?

2. На полке стоят 6 книг с числом страниц последовательно 234; 304; 215; 511; 192; 347. Чему равно среднее арифметическое для этих чисел?

3. Вычислите среднее арифметическое для чисел:

a) -73; 291; 626; -20; 312;

b) 9813093; 9813068; -9813102; 9813051;

c) $70\frac{1}{2}$; $-69\frac{5}{8}$;

d) 1728327; -1728315; 754791; 14900; -754799; -14922;

e) -4; -6; -8; -10; -12; -14; -16;

f) $511\frac{2}{3}$; $102\frac{3}{5}$; $-610\frac{1}{4}$.

4. В 6 «Г» классе 15 девочек и 12 мальчиков. Средний рост девочек равен 122 *см*, мальчиков 119 *см*. Каков общий рост учащихся 6 «Г» класса?

5. Киса Воробьянинов сообщил Остапу Бендеру, что он истратил 320 рублей на покупку стульев. Объясните, почему Остап разозлился, услышав, что средняя стоимость стула составила 25 рублей.

6. Самосвал сделал 3 рейса, в среднем перевозя 2,6 тонны за рейс. Сколько тонн было перевезено в третий раз, если в первый раз перевезено 3,15 тонны, во второй 2,43 тонны?

7. У Мелиса 11 бычков и 4 телки, при этом вес тёлки на 12 килограммов меньше веса бычка. Определите вес бычка и вес тёлки, зная, что средний вес животных Мелиса равен 142 килограмма.

8. Средний рост игроков баскетбольной пятёрки был 181 *см*. После того как вместо Арстана, рост которого равен 190 *см*, на площадку вышел Сулайман, средний рост пятёрки стал 177 *см*. Каков рост Сулаймана?

9. Средний рост игроков волейбольной команды был 172 *см*. После того как вместо Айнуры, на площадку вышла Наталья, рост которой равен 188 *см*, средний рост шести игроков стал 175 *см*. Каков рост Айнуры?

10. В библиотеке было 8 книг «Математика» и 6 книг «История». Определите среднее число страниц в книге, зная, что в «Математике» 320 страниц, а в «Истории» 443 страницы. Как изменился ответ после того как ученики забрали три «Математики» и одну «Историю»?

11. Хоккейная команда «Чайка» имеет три пятёрки полевых игроков и двух вратарей. Средний вес игроков первой пятёрки 71 *кг*, второй составляет 78,4 *кг*, третьей равен 72,8 *кг*. Первый вратарь весит 86 *кг*, второй вратарь 74 *кг*. Каков средний вес игроков команды «Чайка»?

12. Фермерское хозяйство засеяло пшеницу на 9 полях и с каждого гектара первого поля получило по 21 центнеру пшеницы. Зная, что урожайность на других полях составила 24; 18; 28; 18; 24,4; 21; 21; 19, определите среднее арифметическое, медиану и моду этих чисел.

13. Выручка и расходы магазина в 2016 году составили (в млн сомов):

Месяцы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Выручка	7	9	12	6	10	9	11	8	12	9	12	15
Расходы	5	6,8	9	4,1	7	6,6	7,5	6	8	7	8,5	13

Определите среднее арифметическое, медиану и моду для а) выручки; b) расходов; c) прибыли (выручка минус расходы).

14. После того как хозяин магазина из примера 13 ввёл премии для работников, зависящие от выручки результаты последующих месяцев приобрели следующий вид:

Месяцы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Выручка	13	14	16	11	13	15	15	14	16	12	17	20
Расходы	11	12,6	13,8	9,1	11,7	13,6	12,5	13,6	14,8	11,7	16,5	19

Определите среднее арифметическое, медиану и моду для

а) выручки; b) расходов; c) прибыли 2018 года.

15. Сравните результаты примеров 13 и 14. Какие причины могли привести к выявленным изменениям?

16. Анализ количества пропущенных уроков 5 учениц привел к следующим результатам: Аида пропустила 5 уроков, Айжан 14, Назгуль 8, а Канайым 11 уроков. Если среднее арифметическое количества пропущенных уроков 8, то сколько уроков пропустила Мээрим?

17. Вес 7 студентов задается следующими данными: Исмаил весит 75 *кг*, Айша 52 *кг*, Хусейн 68 *кг*, Жусуп 78 *кг*, Фатих 65 *кг*, Сезен 80 *кг*. Если вес Сейфуллаха является медианой для этих значений, то чему (в *кг*) он может быть равен?

18. Уважаемые люди в ответ на вопрос, сколько чашек чая они выпивают в день, ответили: Исмаил выпивает 5 чашек чая, Айша 4, Хусейн 6, Джусуп 8, Пынар 6, Фатих 6, Сердар 7. Айхан сказал, что если число чашек чая, которое он выпивает за день, добавить к предыдущим числам, то оно будет являться модой. Сколько чашек выпивает Айхан за день?

19. Уважаемые люди в ответ на вопрос, сколько чашек чая они выпивают в день, ответили: Иса выпивает 5 чашек чая, Сейил 4, Хамид 6, Турусбек 8, Алтынай 6, Камал 10, Асылбек 7, Анвар x. Сколько чашек чая выпивает Анвар, если число чашек чая, которое он выпивает в день, равно моде? Был ли его ответ однозначным? Как изменится ответ, если известно, что мода только одна?

20. Если совокупность, состоящая из 6 чисел, имеет среднее арифметическое, равное 100, пять элементов соответственно равны 15; 21; 9; 32; 14, то чему равен шестой элемент?

§ 15. Организация данных

15.1. Частотные таблицы

Когда вы собрали данные, вам нужно их организовать. Один из способов организации – это частотные таблицы.

Задача

Постройте частотную таблицу для результатов теста в 5 классе: 30, 40, 20, 30, 10, 40, 50, 20, 10, 40, 50, 30.

Решение

Частота показывает, сколько человек получили определённый результат. Например, 2 человека получили по 10 баллов. Запишем все результаты в таблицу.

Результат теста	Частота
10	2
20	2
30	3
40	3
50	2

393. Максим записал размеры обуви своих одноклассников: 20, 18, 22, 19, 20, 18, 15, 16, 17, 18, 21, 22, 16, 15, 16, 17.

a) Постройте частотную таблицу для размеров обуви.
b) У скольких учеников размер обуви меньше, чем 20?
c) У скольких учеников размер обуви больше, чем 18?

394. Малика записала любимые цвета своих друзей: синий, красный, зелёный, жёлтый, красный, синий, жёлтый, красный, синий, синий, красный, жёлтый, зелёный, зелёный.

Постройте частотную таблицу для цветов.

15.2. Групповая частотная таблица

Задача

В классе измерили вес 16 учеников: 33, 45, 38, 53, 47, 56, 67, 64, 35, 71, 67, 65, 72, 71, 43, 42 *кг*. Постройте групповую частотную таблицу, используя группы 30–39, 40–49…

Решение

Группа	Частота
30–39	3
40–49	4
50–59	2
60–69	4
70–79	3

395. Учитель измерил рост 18 учеников: 102, 112, 145, 133, 122, 118, 123, 137, 147, 156, 103, 114, 121, 109, 122, 143, 139, 161.

Постройте групповую частотную таблицу, используя группы 100–109, 110–119…

396. Учитель измерил время, за которое ученики решают задачу по математике. Время указано в минутах: 8, 12, 23, 34, 4, 17, 43, 15, 9, 27, 21, 13, 45, 51, 61, 14.

Постройте групповую частотную таблицу, используя подходящие группы.

15.3. Гистограммы

Данные могут отображаться по-разному. Поэтому важно выбрать метод, который отображает данные наиболее ясно и эффективно.

Задача

Таблица частот показывает размеры обуви 20 учеников в классе.

Размер обуви	Частота
20	1
20,5	2
21	3
21,5	6
22	5
22,5	2
23	1

Решение

Эту таблицу можно представить в виде гистограммы.

Такие гистограммы имеют определённые свойства:

- каждый столбик имеет одинаковую ширину, а его высота представляет собой частоту;
- столбики соприкасаются друг с другом;
- значение записывается в средней ширине каждого столбика.

397. Ниже указано количество конфет в каждом из 20 пакетов.

22	23	23	24	22	25	23	22	25	24
24	25	24	22	23	24	25	24	23	24

a) Представьте данные в виде частотной таблицы.
b) Представьте данные в виде гистограммы.

398. Запишите размеры обуви всех учеников в своём классе.

a) Представьте данные в виде частотной таблицы.
b) Представьте данные в виде гистограммы.
c) Какие выводы вы можете сделать из результатов?

15.4. Построение гистограммы

Задача

Ученики измерили высоту цветков и записали в таблице.

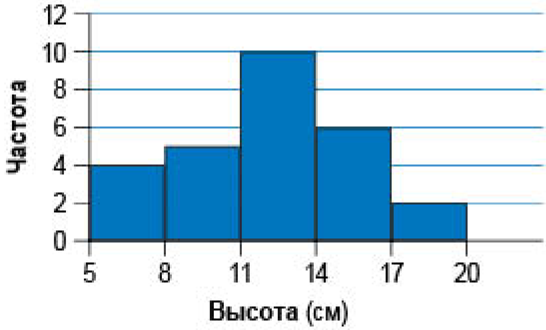
Высота (см)	5–7	8–10	11–13	14–16	17–19
Частота	4	5	10	6	2

Решение

Каждая группа – это «класс» или «интервал».

Если попался цветок с высотой 7,6, то мы записываем его в группу (8–10), в этой группе находятся все цветы с высотой между 7,5 и 10,5.

Можем построить гистограмму.



399. В таблице указано время, затраченное детьми на поездки в школу.

Время (в минутах)	Частота
10–19	4
20–29	5
30–39	9
40–49	3
50–59	2

Представьте данные в виде гистограммы.

400. Учитель измерил рост каждого ученика и записал в таблице.

Рост (см)	Частота
120–124	2
125–129	4
130–134	8
135–139	5
140–144	3
145–149	2

a) Представьте данные в виде гистограммы.
b) В какую группу вы записали бы учеников с ростом 130,4; 129,6; 144,8?

15.5. Полигоны

Частотные таблицы также могут быть показаны в виде полигонов. Чтобы начертить полигон, мы указываем частоту в середине каждого интервала – **серединная точка**.

Задача

Таблица показывает время, потраченное учениками на решение задач.

Время (в минутах)	Частота
$0 \le B < 10$	6
$10 \le B < 20$	8
$20 \le B < 30$	3
$30 \le B < 40$	2

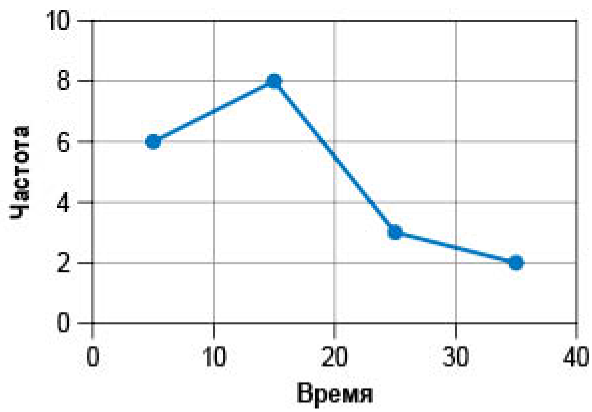
Начертите полигон.

Решение

Сначала укажем серединные точки.

Время (в минутах)	Частота	Серединная точка
$0 \le B < 10$	6	5
$10 \le B < 20$	8	15
$20 \le B < 30$	3	25
$30 \le B < 40$	2	35

Затем начертим полигон.



401. Даниель записал высоту растений в своём саду.

Высота (см)	Частота	Серединная точка
$10 \le B < 20$	3	
$20 \le B < 30$	5	
$30 \le B < 40$	9	
$40 \le B < 50$	4	

a) Дополните таблицу.
b) Представьте данные в виде полигона.

402. В таблице указан вес учеников в классе.

Вес (кг)	Частота	Серединная точка
$40 \le B < 50$	8	
$50 \le B < 60$	10	
$60 \le B < 70$	6	
$70 \le B < 80$	2	

a) Дополните таблицу.
b) Представьте данные в виде полигона.
c) Сколько всего учеников в этом классе?
d) Какая доля этого класса имеет вес меньше, чем 60 кг?

15.6. Круговые диаграммы

Круговые диаграммы – это ещё один способ предоставления данных. Эти диаграммы используются, когда вы хотите показать части целого.

Задача

200 учеников школы добираются в школу следующим образом: 60 – на автобусе; 40 – на маршрутке; 70 – пешком; 30 – на машине.

Представьте это в виде круговой диаграммы.

Решение

Доля учеников, которые добираются на автобусе, равна $\frac{60}{200} = \frac{30}{100} = 30\%$.

Посчитаем остальные части и построим диаграмму.

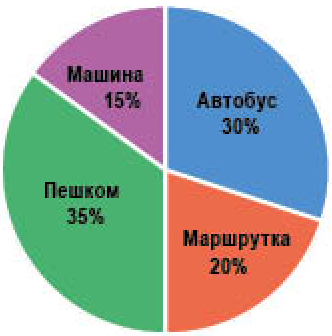


Рисунок 25

403. Малика заработала 10 000 сомов. Она потратила эти деньги на: кроссовки – 3000; кафе – 1000; шорты – 2000; банковские сбережения – 3500; кинотеатр – 500.

Представьте это в виде круговой диаграммы.

404. В классе из 32 человек проголосовали за любимый предмет: физика – 4, математика – 12, английский – 6, испанский – 6, химия – 4.

a) Постройте круговую диаграмму.
b) Сколько процентов учеников выбрали математику?

405. Проведите опрос в своём классе и составьте частотную таблицу. Выберите любую подходящую тему, к примеру, любимый цвет, цвет глаз, сколько минут ученики тратят, чтобы добраться до школы, любимая футбольная команда и т. д.

1. Адам бросает игральную кость и записывает результаты:

1, 4, 3, 2, 2, 1, 3, 4, 3, 6

4, 6, 5, 6, 4, 6, 2, 3, 1, 4

Запишите результаты в виде частотной таблицы.

2. Показано количество голов, забитых баскетбольной командой в 18 играх.

41, 52, 33, 45, 67, 53, 49, 21, 57

39, 61, 43, 46, 24, 36, 54, 41, 38

Постройте групповую частотную таблицу, используя подходящие группы.

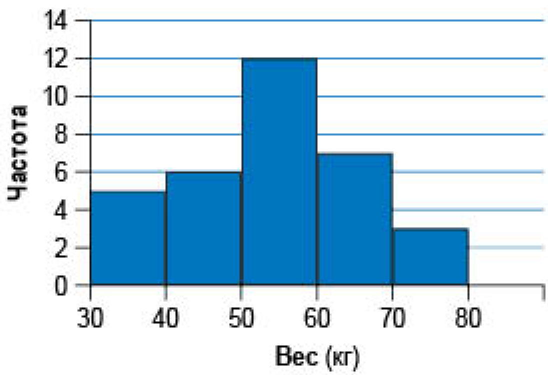
3. Результаты тестов 82 учеников написаны в таблице.

0–19	20–29	30–39	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99
8	10	14	18	15	5	6	4	2

a) Начертите другую таблицу, в которой интервалы равны 20 баллам.

b) Представьте данные в виде гистограммы.

4. Гистограмма показывает вес учеников в классе.



a) Сколько учеников в группе 60–69?

b) Постройте частотную таблицу, используя эту гистограмму.

c) Какой вес ученика будет минимально возможным?

d) Какой вес ученика будет максимально возможным?

5. Таблица показывает время, потраченное учениками на домашнее задание.

Время (мин)	Частота	Серединная точка
10–19	2	
20–29	4	
30–39	10	
40–49	3	

a) Дополните таблицу.
b) Представьте данные в виде полигона.

6. Бюджет школы был потрачен следующим образом:

55% – зарплата учителей; 15% – ремонт классов; 10% – покупка книг; 10% – покупка компьютеров; 5% – обновление спортзала; 5% – покупка игрушек.

a) Покажите информацию в виде круговой диаграммы.
b) Если школа потратила 200 000 сомов на обновление спортзала, сколько всего было в бюджете?

7. Круговая диаграмма показывает бюджет школы (см. рис. 26).

a) Если на ремонт было потрачено 300 000 сомов, сколько всего было в бюджете?
b) Посчитайте, сколько было потрачено на каждый сектор.

8. Диаграмма показывает объём продаж разных видов «Шоро» (см. рис. 27).

a) Какую часть от всех продаж составляет «Бозо шоро»?
b) Если объём продаж «Джарма шоро» составляет $\frac{34}{200}$ от всех продаж, рассчитайте, чему равны x% и y%.

Рисунок 26

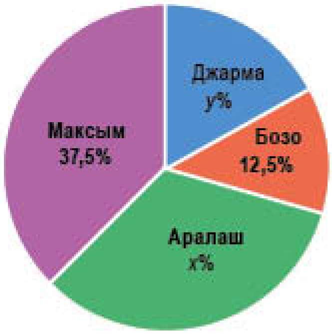


Рисунок 27

§ 16. Окружность. Круг. Сектор

16.1. Длина окружности и площадь круга

Сможете ли вы сказать, что такое круг? Что за глупый вопрос, скажут многие. Круг – это круг, и все его знают. К сожаленью, в науке часто того, что «все это знают», недостаточно. Нужно то, что называют научным определением.

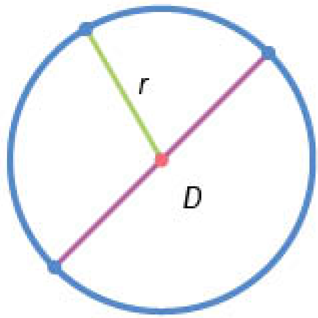


Рисунок 28

Окружностью называется множество точек плоскости, равноудалённых от некоторой точки. Эта точка является центром окружности.

Радиусом называется отрезок, соединяющий точку окружности с его центром.

Диаметром называют отрезок, соединяющий две точки окружности и проходящий через её центр.

Кругом называется часть плоскости, ограниченная окружностью.

Не трудно понять, что два радиуса, лежащие на одной прямой, образуют диаметр. Поэтому, если r – длина радиуса, а D – длина диаметра, то $D = 2r$.

Древние математики решили множество задач, выяснили различные свойства геометрических объектов. Однако несколько задач не были решены. Одна из них – это задача о квадратуре круга. Её содержание: требуется построить круг, площадь которого точно совпадает с площадью заданного квадрата. И дело не в том, что не хватило старания или «мозгов». Оказывается, эта задача не имеет решения. Они выяснили, что отношение площади круга к площади квадрата со стороной, равной радиусу круга, есть число, которое нельзя записать в виде отношения целых чисел.

Более того, выяснилось, что это число, в то же время, есть отношение длины окружности к её диаметру. Математики договорились обозначать его греческой буквой π (читается «пи»). Обычно используется его приближённое значение, равное 3,14. Ели вам нужно более точное значение, то возьмите $\pi \approx 3{,}1415926535897932$. Следует отметить, что и это значение не является точным – для того чтобы написать точное значение, понадобится бесконечно много цифр.

Задача

1) Найдите длину окружности с диаметром 4 *см*.
2) Найдите радиус окружности, длина которой равна 9,42 *см*.
3) Найдите площадь круга с радиусом 2,5 *м*.

Решение

1) Обозначим длину окружности через C. Тогда вышесказанное на языке формул запишется в виде:

$$C = \pi D,$$

где C – длина окружности, D – диаметр окружности.

Поэтому точный ответ: $C = 4\pi$. Мы можем получить численное значение, взяв приближённое значение для π. Так, если взять $\pi = 3{,}14$, то получим, что длина окружности приблизительно равна: $4 \cdot 3{,}14 = 12{,}56$ *см*.

2) Задание можно выполнить, использовав формулу из первой части, а можно использовать её видоизменённый вариант:

$$C = 2\pi r,$$

где C – длина окружности, r – радиус окружности.

Отсюда следует: $r = \dfrac{C}{2\pi}$. Поэтому $r = \dfrac{9{,}42}{2\pi} = \dfrac{4{,}71}{\pi}$. Получим численное значение, взяв $\pi = 3{,}14$: $r = \dfrac{4{,}71}{\pi} = 1{,}5$ *см*.

3) Обозначим площадь круга через S. Тогда, ещё раз из вышесказанного, получим формулу:

$$S = \pi r^2,$$

где S – площадь круга, r – радиус окружности.

Отсюда ответ: $S = \pi r^2 = \pi(2{,}5)^2 = 6{,}25\pi$. Приближённое численное значение:

$S = 6{,}25\pi \approx 6{,}25 \cdot 3{,}14 = 19{,}625$ *м*^{2}.

406. Найдите длину окружности с диаметром 3,5 *см*.

407. Найдите радиус окружности, длина которой равна 13,816 *см*.

408. Найдите площадь круга с радиусом 4,25 *м*.

409. Найдите длину окружности с диаметром 6,1 *см*.

410. Найдите радиус окружности, длина которой равна 15,7 *см*.

411. Найдите площадь круга с радиусом 4 *м*.

16.2. Длина окружности и площадь круга. Приложения

Задача

Найдите длину экватора Земли.

Решение

Условно говоря, экватор – это воображаемая окружность, отделяющая северное полушарие Земли от южного. И нам предстоит найти длину этой окружности.

Справочники говорят, что экваториальный радиус Земли равен 6378 *км*. (Земля не является идеальным шаром. Поэтому значение радиуса в разных точках Земли может несколько отличаться.) Отсюда длина экватора Земли: $C \approx 2\pi \cdot 6378 \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6378 \approx 40\,054$ *км*.

412. Колесо на расстоянии 3768 *м* сделало 1500 оборотов. Найдите диаметр колеса ($\pi \approx 3{,}14$).

413. Канайым и Сыргак купили круглый арбуз диаметром 30 *см*. Разрезав его пополам, они съели половину, а вторую положили в холодильник. Какой была, как минимум, площадь плёнки, которой был накрыт разрез арбуза, прежде чем его отправили в холодильник?

16.3. Круговой сектор

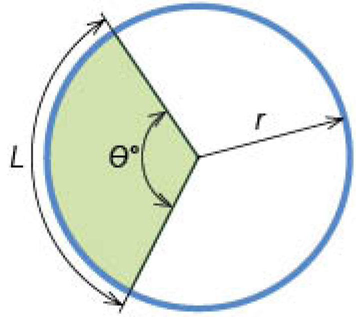


Рисунок 29

Часть круга, ограниченная двумя радиусами, называется **круговым сектором**.

Если взять два перпендикулярных друг другу радиуса, то они разобьют круг на 2 части. Одна будет составлять четверть круга, другая – три четверти. Перпендикулярные друг другу радиусы образуют угол 90°. Таким образом выяснилось, что круговой сектор, ограниченный радиусами, между которыми угол 90°, имеет площадь $\frac{1}{4} \cdot \pi r^2$.

Разбив этот сектор на две равные части, получим, что круговой сектор, ограниченный радиусами, между которыми угол 45°, имеет площадь $\frac{1}{8} \cdot \pi r^2$.

Разбив этот сектор на три равные части, получим, что круговой сектор, ограниченный радиусами, между которыми угол 30°, имеет площадь $\frac{1}{12} \cdot \pi r^2$...

Теперь осталось увидеть, что $\frac{1}{4} = \frac{90^\circ}{360^\circ}$; $\frac{1}{8} = \frac{45^\circ}{360^\circ}$; $\frac{1}{12} = \frac{30^\circ}{360^\circ}$ ...

Итак, мы пришли к формуле:

> Площадь кругового сектора, ограниченного радиусами, между которыми угол Θ°, равна $\frac{\Theta}{360} \cdot \pi r^2$.
>
> Угол Θ называется **центральным углом**.
>
> Часть окружности, ограниченная двумя радиусами, называется **дугой**.

Повторив рассуждения, относящиеся к круговому сектору, получим формулу, позволяющую вычислять длину дуги L:

> Длина дуги, ограниченной радиусами, между которыми угол Θ°, равна $\frac{\Theta}{360} \cdot 2\pi r$.

Задача

1) Найдите радиус окружности, зная, что длина дуги, определяемой центральным углом 120°, равна 31,4 *м*.

2) Найдите площадь кругового сектора, определяемого центральным углом 20° с радиусом 2 *м*.

Решение

1) Из формулы $L = \frac{\Theta}{360} \cdot 2\pi r$ получаем, что $31{,}4 = \frac{120}{360} \cdot 2\pi r$. Отсюда следует: $31{,}4 = \frac{2}{3} \cdot \pi r$.

Поэтому точный ответ: $r = \frac{47{,}1}{\pi}$. Если взять $\pi = 3{,}14$, то получим, что радиус окружности приблизительно равен $\frac{47{,}1}{3{,}14} = 15$ *м*.

2) Так как площадь кругового сектора S_s равна $\frac{\Theta}{360} \cdot \pi r^2$, получаем, что $S_s = \frac{20}{360} \cdot \pi 2^2 = \frac{2}{9}\pi$. Численное значение при $\pi = 3{,}14$: $S_s \approx \frac{2}{9} \cdot 3{,}14 \approx 0{,}7$ *м*.

414. 1) Найдите длину дуги окружности с диаметром 5 *см* и центральным углом 40°. ($\pi \approx 3{,}14$)

415. 2) Найдите площадь кругового сектора, определяемого центральным углом 75°, с радиусом 8 *м*. ($\pi \approx 3{,}14$)

416. 1) Найдите длину дуги окружности с радиусом 8 *мм* и центральным углом 15°. ($\pi \approx 3{,}14$)

417. 2) Найдите площадь кругового сектора, определяемого центральным углом 81°, с радиусом 10 *м*. ($\pi \approx 3{,}14$)

1. Найдите длину окружности с диаметром 9,1 *см*.

2. Найдите радиус окружности, длина которой равна 14,13 *см*.

3. Найдите площадь круга с радиусом 7 *м*.

4. Колесо диаметром 75 *см* сделало 200 оборотов. Определите пройденное расстояние. ($\pi \approx 3{,}14$)

5. Найдите длину дуги окружности с диаметром 6 *см* и центральным углом 60°. ($\pi \approx 3{,}14$)

6. Найдите площадь кругового сектора, определяемого центральным углом 75°, с радиусом 8 *м*. ($\pi \approx 3{,}14$)

А1. Волшебная таблица

1.1. Таблица с десятичными дробями

Встретившиеся после каникул шестиклассники оживлённо обсуждали прошедшее лето. «А я составила волшебную таблицу ко Дню независимости», – сказала Айгуль. «Ой, как здорово! Покажи!» – начали тормошить её ребята. Она предъявила листочек со следующей таблицей:

10,55	12,36	12,66
11,47	13,28	13,58
5,14	6,95	7,25

Тилек выбрал число 11,47 и, произнеся волшебное заклинание «симсалабим», удалил из таблицы числа, стоявшие на одной строке и в одном столбце с выбранным числом:

	12,36	12,66
11,47		
	6,95	7,25

Следующее число, 12,66, выбрал Турар.

После заклинания «ахалай-махалай» исчезли числа, стоявшие на одной строке и в одном столбце с этим числом:

		12,66
11,47		
	6,95	

Ребята сложили получившиеся числа: 11,47 + 6,95 + 12,66 = 31,08.

«А я тоже составил таблицу с волшебным числом 31,08, которое выражает главный праздник нашей страны», – сказал Мурат и предъявил таблицу:

1,06	14,06	19,55
−5,27	7,73	13,22
3,8	16,8	22,29

«Наверно, дело в том, что этот праздник только что был – у меня таблица с этим же числом», – включился в разговор Ормон и показал свою таблицу:

8,84	26,21	39,22	13,04
0,93	18,3	31,31	5,13
4,85	22,22	35,23	9,05
−35,49	−18,12	−5,11	−31,29

418. Из волшебной таблицы узнайте, когда Ирина празднует свой день рождения.

9,27	11,35	7,84
8,77	10,85	7,34
10,4	12,48	8,97

419. Убедитесь в том, что таблица Ормона волшебная, испытав её три раза, каждый раз начиная с числа, стоящего в первом столбце.

420. Из волшебной таблицы узнайте, когда Ольга празднует свой день рождения.

3,61	5,93	6,89
2,33	4,65	5,61
−2,48	−0,16	0,8

421. Убедитесь в том, что таблица Мурата волшебная, испытав её три раза, каждый раз начиная с числа, стоящего в первой строке.

1.2. Принцип расположения чисел

«А я могу составить сколько угодно таких таблиц», – сказала Акылай. «Да ну?» – не поверили ей ребята. «Дело в том, что я поняла, каким образом составляются волшебные таблицы, и вы тоже сможете это понять», – продолжила Акылай. После этого она предложила повнимательнее посмотреть на следующие волшебные таблицы.

422. Присоединитесь к ребятам и постарайтесь увидеть закономерности расположения чисел в таблице.

1)

3	6
4	7

2)

14	16
21	23

3)

32	58
16	42

4)

–5	1
12	18

5)

12	14	15
11	13	14
19	21	22

6)

3	13	4
8	18	9
6	16	7

7)

10,5	11,5	10,4
8	9	7,9
13	14	12,9

8)

21	15	25
–3	–9	1
12	6	16

Через некоторое время Максат сказал: «Я, кажется, понял». «Я тоже», – присоединилась к Максату Салтанат.

Надеемся, что вы тоже поняли.

423. Убедитесь в том, что таблицы волшебные, – сумма трёх чисел, выбранных вышеизложенным методом, всегда одна и та же.

1)

15	20	30
9	14	24
6	11	21

2)

5	7	12
3	5	10
10	12	17

424. Имеют ли место закономерности расположения чисел, которые вы заметили в таблицах 1 и 2?

425. Для того чтобы убедиться в том, что вы правильно определили закономерности, вставьте недостающие числа в следующие таблицы, а затем убедитесь в том, что получились волшебные таблицы.

1)

8		5
11	16	8
12		

2)

		12
		10
10	12	15

3)

18	23	
1	6	8
21		

4)

–5		
4		
11	2	5

1.3. Секрет волшебной таблицы

Теперь мы готовы к раскрытию секрета волшебной таблицы: произнося заклинания, мы выбираем по одному числу из каждой строки и столбца, а каждое число в таблице есть сумма «образующих» для каждой строки и столбца.

Что значит *образующая*?

Для того чтобы получить волшебную таблицу, в которой четыре элемента и спрятано волшебное число, разобьём волшебное число на 4 слагаемых-образующих и «закрепим» за каждым из них одну строку и столбец; в каждую клетку таблицы запишем сумму образующих соответствующей строки и столбца. Например, волшебная таблица с суммой чисел 21 может быть получена следующим образом: разобьём число на образующие: 21 = 9 + 7 + 3 + 2.

Примечание

При разбиении на слагаемые первые 3 числа можно брать произвольным образом, а последнее будет равно разности между волшебным числом и суммой трёх выбранных чисел.

Начертим таблицу и припишем к ней образующие.

	9	7
3		
2		

В каждую клетку таблицы впишем сумму соответствующих образующих.

	9	7
3	12	10
2	11	9

Легко убедиться, что получилась таблица с волшебным числом 21.

Чтобы получить волшебную таблицу, в которой после заклинаний «сим-салабим» и «ахалай-махалай» остаётся три числа с суммой, равной волшебному числу, разобьём это число на 6 слагаемых-образующих и «закрепим» за каждым из них одну строку и столбец. В каждую клетку таблицы запишем сумму образующих соответствующей строки и столбца.

Например, волшебная таблица с суммой чисел 101 может быть получена следующим образом:

разобьём число на образующие: 101 = 10 + 20 + 30 + 14 + 15 + 12.

Примечание

При разбиении на слагаемые первые 5 чисел можно брать произвольным образом, а последнее будет равно разности между исходным числом и суммой 5-ти выбранных чисел.

Начертим таблицу и припишем к ней образующие.

	10	20	30
14			
15			
12			

В каждую клетку таблицы впишем сумму соответствующих образующих:

	10	20	30
14	24	34	44
15	25	35	45
12	22	32	42

Несложно убедиться в том, что полученная таблица является волшебной, а волшебство объясняется очень просто.

Произнося волшебные заклинания, мы каждый раз выделяем три числа, которые являются суммами образующих – то есть каждый раз, вычисляя сумму трёх выбранных чисел, мы вычисляем сумму образующих. Выбирая разные тройки чисел, мы формируем суммы, которые различаются только порядком слагаемых-образующих.

Так как известно, что от перемены мест слагаемых сумма не изменяется, результат сложения всегда один и тот же.

Понятно, что так же можно составлять таблицы размером 4×4 – в этом случае понадобится 8 образующих размером 5×5 и так далее.

Задача

Составьте волшебную таблицу:
1) размера 3×3, которая даёт в результате число 9,9;
2) размера 4×4, которая даёт в результате число 9.

Решение

Из вышесказанного следует, что решений у задачи много: таблица зависит от образующих, а образующими может быть любая группа соответствующего числа слагаемых, сумма которых есть волшебное число.

1) Эта таблица имеет 6 образующих – по одной образующей на каждую строку и столбец. Как уже было сказано, первые пять образующих можно брать произвольно, затем к их сумме добавить шестую так, чтобы

получилось волшебное число. Выполняя такое задание в группе, можно предложить разным лицам называть любые числа по своему выбору. Пусть названы числа 2; 15; −9; −1,7; 3,21; 5,5. Тогда волшебная таблица получится, если шестая образующая x удовлетворяет уравнению:

$2{,}15 + (-9) + (-1{,}7) + 3{,}21 + 5{,}5 + x = 9{,}9$.

Отсюда следует: $0{,}16 + x = 9{,}9$. Следовательно, $x = 9{,}9 - 0{,}16 = 9{,}74$.

Осталось начертить таблицу, приписать к ней образующие.

	2,15	−9	−1,7
3,21			
5,5			
9,74			

Впишем в каждую клетку таблицы сумму соответствующих образующих.

	2,15	−9	−1,7
3,21	5,36	−5,79	1,51
5,5	7,65	−3,5	3,8
9,74	11,89	0,74	8,04

Проверив, убедимся в том, что полученная таблица является волшебной. Например, сумма чисел, стоящих по главной диагонали: $5{,}36 + (-3{,}5) + 8{,}04 = 9{,}9$.

2) Для этой таблицы нужно 8 образующих – по числу строк и столбцов. Выбираем первые семь образующих произвольно, пусть это будут числа 21,1; −19; −1,27; 13,2; 5,15; −2; 7; к их сумме добавляем восьмую образующую y, чтобы получилось число 9.

Тогда получится уравнение:

$21{,}1 + (-19) + (-1{,}27) + 13{,}2 + 5{,}15 + (-2) + 7 + y = 9$.

Отсюда следует: $24{,}18 + y = 9$. Следовательно, $y = 9 - 24{,}18 = -15{,}18$.

Осталось начертить таблицу, приписать к ней образующие:

	21,1	−19	−1,27	13,2
5,15				
−2				
7				
−15,18				

и вписать в каждую клетку таблицы сумму соответствующих образующих.

	21,1	−19	−1,27	13,2
5,15	26,25	−13,85	3,88	18,35
−2	19,1	−21	−3,27	11,2
7	28,1	−12	5,73	20,2
−15,18	5,92	−34,18	−16,45	−1,98

Сумма чисел, стоящих на второй диагонали:

$5,92 + (-12) + (-3,27) + 18,35 = 9$, – подтверждает правильность наших расчётов.

426. Составьте волшебную таблицу:

1) размера 3×3, которая даёт в результате число: a) 77; b) 101;
2) размера 4×4, которая даёт в результате число: a) 57; b) 127.

427. Составьте волшебную таблицу:

1) размера 3×3, которая даёт в результате число: a) 46; b) 210;
2) размера 4×4, которая даёт в результате число: a) 37; b) 300.

428. Составьте волшебную таблицу:

1) размера 3×3, которая даёт в результате день рождения вашей мамы;
2) размера 4×4, которая даёт в результате день рождения вашего папы.

1.4. Характеристическое свойство таблиц

После того как стала понятна суть волшебных таблиц, становится понятным их характеристическое свойство: элементы, стоящие в соседних строках, отличаются на одно и то же число. То же самое справедливо и для элементов, стоящих в соседних столбцах. Понятно, что каждый раз разность равна разности соответствующих образующих.

Задача

Вставьте недостающие числа в следующие таблицы, а затем убедитесь в том, что получились волшебные таблицы.

1)

	3,17
−5	14

2)

5	−3	1,2
		1,9
10		

3)

5		12	
		−9	10
10			
3	−2		

Решение

1. Обозначим отсутствующее число буквой a. Тогда, так как разность элементов, стоящих в соседних столбцах, равна $14 - (-5) = 19$, имеет место уравнение $3{,}17 - a = 19$.

Отсюда следует: $a = 3{,}17 - 19 = -15{,}83$. Следовательно, волшебная таблица:

−15,83	3,17
−5	14

Результат можно проверить разными способами:

- вычислить волшебное число:
  $$-15{,}83 + 14 = -1{,}83; \ -5 + 3{,}17 = -1{,}83;$$
- вычислить разность между строчками:
  $$-15{,}83 - (-5) = -10{,}83; \ 3{,}17 - 14 = -10{,}83.$$

2. Обозначим отсутствующие числа буквами:

5	−3	1,2
a	*b*	1,9
10	*c*	*d*

Тогда, так как разность элементов, стоящих во второй и первой строках, равна $1{,}9 - 1{,}2 = 0{,}7$, имеют место уравнения: $a - 5 = 0{,}7$; $b - (-3) = 0{,}7$.

Отсюда следует: $a = 0{,}7 + 5 = 5{,}7$; $b = 0{,}7 - 3 = -2{,}3$.

Внесём полученные результаты в таблицу:

5	−3	1,2
5,7	−2,3	1,9
10	*c*	*d*

Разность элементов, стоящих в третьей и второй строках, равна $10 - 5{,}7 = 4{,}3$.

Следовательно, имеют место уравнения: $c - (-2{,}3) = 4{,}3$; $d - 1{,}9 = 4{,}3$.

Отсюда следует: $c = 4{,}3 - 2{,}3 = 2$; $d = 4{,}3 + 1{,}9 = 6{,}2$.

Итак, волшебная таблица:

5	−3	1,2
5,7	−2,3	1,9
10	2	6,2

Проверим результат, вычислив волшебное число разными способами:

$$5 + (-2{,}3) + 6{,}2 = 8{,}9; \ -3 + 1{,}9 + 10 = 8{,}9.$$

3. Обозначим отсутствующие числа буквами:

5	a	12	b
c	d	−9	10
10	e	f	g
3	−2	h	i

Тогда, так как разность элементов, стоящих во второй и первой строках, равна $-9 - 12 = -21$, имеют место уравнения: $c - 5 = -21$; $10 - b = -21$.

Отсюда следует: $c = -21 + 5 = -16$; $b = 10 + 21 = 31$.

Внесём полученные результаты в таблицу:

5	a	12	31
−16	d	−9	10
10	e	f	g
3	−2	h	i

Разность элементов, стоящих в третьей и второй строках, равна $10 - (-16) = 26$.

Следовательно, имеют место уравнения: $f - (-9) = 26$; $g - 10 = 26$.

Отсюда следует: $f = 26 - 9 = 17$; $g = 26 + 10 = 36$.

Тогда волшебная таблица примет вид:

5	a	12	31
−16	d	−9	10
10	e	17	36
3	−2	h	i

Разность элементов, стоящих в четвёртой и третьей строках, равна $3 - 10 = -7$.

Тогда: $-2 - e = -7$; $h - 17 = -7$; $i - 36 = -7$.

Поэтому: $e = 7 - 2 = 5$; $h = -7 + 17 = 10$; $i = -7 + 36 = 29$.

Итак:

5	a	12	31
−16	d	−9	10
10	5	17	36
3	−2	10	29

Для того чтобы определить оставшиеся элементы, воспользуемся разностью элементов, стоящих во 2 и 1 столбцах: $-2 - 3 = -5$.

Тогда имеют место уравнения: $a - 5 = -5$; $d - (-16) = -5$.
Поэтому: $a = -5 + 5 = 0$; $d = -5 - 16 = -21$.
Внесём полученные результаты и получим искомую таблицу:

5	0	12	31
−16	−21	−9	10
10	5	17	36
3	−2	10	29

В полученной таблице разность элементов, стоящих в соседних строках, а затем и в соседних столбцах, одинакова. Это убеждает нас в правильности полученного результата.

429. Вставьте недостающие числа в следующие таблицы, а затем убедитесь в том, что получились волшебные таблицы.

1)

8		
3	−6	8
12		

2)

		12
5,5		
−10	12	15

3)

18	2,3	
1		8
−2		

4)

−5		
	3	
1,1	2	5

430. Вставьте недостающие числа в следующие таблицы, а затем убедитесь в том, что получились волшебные таблицы.

1)

		300	
	140		103
6	17		
		315	237

2)

5			
−5			
10			
3	12	19	10

1.5. Умножательные таблицы

Надеемся, что вы помните о том, что наряду со слагательными волшебными таблицами существуют и умножательные. Думаем, что настала пора обратиться к ним.

Задача

Проверьте, являются ли следующие таблицы волшебными умножательными.

a)

2	−7
−4	14

b)

5	−2	12
6	−2,4	14,4
18	−8,2	43,2

Решение

a) Выбрав в качестве первого элемент 2, удалим элементы, стоящие с ним в одной строке и одном столбце:

2	
	14

Произведение оставшихся элементов: $2 \cdot 14 = 28$.
Если же выбрать элемент -4, то

	−7
−4	

Отсюда получаем: $(-4) \cdot (-7) = 28$.
Следовательно, таблица волшебная, умножательная.

b) Последовательно выбирая в качестве первого элементы первой строки, получим первую тройку с произведением: $5 \cdot (-2{,}4) \cdot 43{,}2 = -518{,}4$.

5	−2	12
6	−2,4	14,4
18	−8,2	43,2

5		
	−2,4	14,4
	−8,2	43,2

5		
	−2,4	
		43,2

Вторую тройку с произведением: $(-2) \cdot 6 \cdot 43{,}2 = -518{,}4$.

5	−2	12
6	−2,4	14,4
18	−8,2	43,2

	−2	
6		14,4
18		43,2

	−2	
6		
		43,2

Третью тройку с произведением: $12 \cdot 6 \cdot (-8{,}2) = -590{,}4$.

5	−2	12
6	−2,4	14,4
18	−8,2	43,2

		12
6	−2,4	
18	−8,2	

		12
6		
	−8,2	

Итак, выяснилось, что таблица не является умножательной волшебной.

431. Проверьте, являются ли следующие таблицы волшебными умножательными.

1)

12	−2,7
4	−0,9

2)

−2,2	−7
5,5	16,5

3)

8	−4	12
3	1,5	4,5
12	−6	18

4)

4	1	1,2
5	1,25	1,5
−10	−2,5	−3

432. Проверьте, являются ли следующие таблицы волшебными умножательными.

1)

−2	−7
14	59

2)

21	−7,2
−42	14,4

3)

−18	36	−48
3	−6	8
−15	30	−40

4)

1,1	0,2	12
5,5	1	60
−22	−40	−240

1.6. Поиск секрета умножательной таблицы

Некоторые таблицы, рассмотренные в предыдущем пункте, оказались неволшебными. Можно задать себе вопрос: «Какие числа нужно изменить, для того чтобы изменённая таблица стала волшебной?» Поиском ответа на этот вопрос займёмся сейчас.

433. Постарайтесь увидеть закономерности расположения чисел в волшебных умножательных таблицах.

1)

3	6
9	18

2)

−14	7
28	−14

3)

−3,2	−16
−1,6	−8

4)

0,5	35
1,2	84

5)

2	4	5
4	8	10
12	24	30

6)

−3	1	−4
24	−8	32
−6	2	−8

7)

0,5	1,1	0,4
8	17,6	6,4
0,32	0,704	0,256

Надеемся, что вы поняли, как составлены волшебные умножательные таблицы.

434. Убедитесь в том, что таблицы волшебные – произведение трёх чисел, выбранных волшебным методом, всегда одно и то же.

1)

15	20	30
3	4	6
6	8	12

2)

5	7	12
30	42	72
10	14	24

435. Имеют ли место закономерности расположения чисел, которые вы заметили в таблице 434.1?

436. Имеют ли место закономерности расположения чисел, которые вы заметили в таблице 434.2?

437. Чтобы убедиться в том, что вы правильно определили закономерности, вставьте недостающие числа в следующие таблицы, а затем убедитесь в том, что получились волшебные таблицы:

1)

8		5
4	16	2,5
12	48	

2)

		2
		10
9	12	15

3)

18	3	
36	6	–18
2,4		

4)

–5		
40		
0,1	2	0,5

1.7. Секрет умножательной таблицы

Как вы уже догадались, секрет волшебной умножательной таблицы почти такой же, как у слагательной: произнося заклинания, мы выбираем по одному числу из каждой строки и столбца, а каждое число в таблице есть произведение *образующих* для каждой строки и столбца.

Что значит образующая для *умножательной* таблицы?

Для того чтобы получить волшебную таблицу, в которой четыре элемента и спрятано волшебное число, разобьём волшебное число на 4 сомножителя-образующих и закрепим за каждым из них одну строку и столбец. В каждую клетку таблицы запишем произведение образующих соответствующей строки и столбца. Например, волшебная таблица с произведением чисел 24 может быть получена следующим образом:

Примечание

При разбиении на сомножители первые 3 числа можно брать произвольным образом, а последнее будет равно частному от деления волшебного числа на произведение трёх выбранных чисел.

- разобьём число на образующие: $24 = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3$;
- начертим таблицу и припишем к ней образующие:

	1	2
4		
3		

В каждую клетку таблицы впишем произведение соответствующих образующих:

	1	2
4	4	8
3	3	6

В итоге получилась умножательная таблица с волшебным числом 24.

Для того чтобы получить умножательную таблицу, в которой после волшебных заклинаний «сим-салабим» и «ахалай-махалай» остаётся три числа с произведением, равным волшебному числу, разобьём это число на 6 сомножителей-образующих и закрепим за каждым из них одну строку и столбец. В каждую клетку таблицы запишем произведение образующих соответствующей строки и столбца. Например,

Примечание

При разбиении на сомножители первые 5 чисел можно брать произвольным образом, а последнее будет равно частному от деления волшебного числа на произведение пяти выбранных чисел.

волшебная таблица с произведением чисел 21 может быть получена следующим образом:

- разобьём число на образующие: $21 = 2 \cdot 0{,}1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1$;
- начертим таблицу и припишем к ней образующие:

	2	0,1	5
7			
3			
1			

В каждую клетку таблицы впишем произведение соответствующих образующих.

	2	0,1	5
7	14	0,7	35
3	6	0,3	15
1	2	0,1	5

Несложно убедиться в том, что полученная таблица является волшебной.

Как и в случае со слагательными таблицами, волшебство объясняется очень просто.

Произнося волшебные заклинания, мы каждый раз выделяем три числа, которые являются произведением образующих – то есть каждый раз, вычисляя произведение трёх выбранных чисел, мы вычисляем произведение образующих. Выбирая разные тройки чисел, мы формируем произведения, которые различаются только порядком сомножителей-образующих.

Так как известно, что от перемены мест сомножителей произведение не изменяется, результат умножения всегда один и тот же.

Понятно, что таким образом можно составлять таблицы размером 4×4 – в этом случае понадобится 8 образующих; размером 5×5 и так далее.

Примечание

При выборе образующих полезно использовать то, что $2 \cdot 0{,}5 = 1$; $4 \cdot 0{,}25 = 1$; $0{,}2 \cdot 5 = 1$ и т. п.

Задача

Составьте волшебную умножательную таблицу:

a) размера 2×2, которая даёт в результате число 10;

b) размера 3×3, которая даёт в результате число 90.

Решение

Из вышесказанного следует, что решений у задачи много: таблица зависит от образующих, а образующими может быть любой набор соответствующего числа слагаемых, произведение которых есть волшебное число.

a) Эту таблицу можно составить при помощи 4 образующих – сопоставив их каждой строке и столбцу. Как уже было сказано, три образующих можно брать произвольно, затем их произведение умножить на четвёртую так, чтобы получилось волшебное число. Выберем числа 2, 5; 4; −2. Тогда волшебная таблица получится, если четвёртая образующая x удовлетворяет уравнению: $2{,}5 \cdot 4 \cdot (-2) \cdot x = 10$.

Отсюда следует: $-20x = 10$. Следовательно, $x = 10 : (-20) = -0{,}5$.

Осталось начертить таблицу, приписать к ней образующие:

	2,5	4
−2		
−0,5		

и вписать в каждую клетку таблицы произведение соответствующих образующих:

	2,5	4
−2	−5	−8
−0,5	−1,25	−2

Проверив: $(-5) \cdot (-2) = 10$; $(-1{,}25) \cdot (-8) = 10$, убедимся в том, что полученная таблица является волшебной.

b) Эта таблица имеет 6 образующих – по одной образующей на каждую строку и столбец. Как уже было сказано, первые пять образующих можно брать произвольно, затем их произведение умножить на шестую, так чтобы получилось волшебное число.

Выберем числа 2; 5; 3; 0,25; 4. Тогда волшебная таблица получится, если шестая образующая x удовлетворяет уравнению $2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 0{,}25 \cdot 4 \cdot y = 90$. Отсюда $30y = 90$ и, следовательно, $y = 90 : 3 = 3$.

Осталось начертить таблицу, приписать к ней образующие:

	2	5	3
0,25			
4			
3			

и вписать в каждую клетку таблицы произведение соответствующих образующих:

	2	5	3
0,25	0,5	1,25	0,75
4	8	20	12
3	6	15	9

Проверив, убедимся в том, что полученная таблица является волшебной. Например, произведение чисел, стоящих по главной диагонали: $0{,}5 \cdot 20 \cdot 9 = 90$.

438. Составьте волшебную таблицу:

1) размера 2×2, которая даёт в результате числа a) -7; b) 1,6;
2) размера 3×3, которая даёт в результате числа a) 50; b) 12.

439. Составьте волшебную таблицу:

1) размера 2×2, которая даёт в результате числа a) 46; b) $-2{,}1$;
2) размера 3×3, которая даёт в результате числа a) 40; b) 6.

1.8. Характеристическое свойство умножательных таблиц

Мы готовы сформулировать характеристическое свойство волшебных умножательных таблиц: элементы, стоящие в разных строках одного столбца, отличаются на один и тот же сомножитель. То же самое справедливо и для элементов, стоящих в разных столбцах одной строки. Понятно, что каждый раз частное равно частному соответствующих образующих.

Задача

Вставьте недостающие числа в следующие таблицы, а затем убедитесь в том, что получились волшебные таблицы.

1)

	3
−5	15

2)

5	−4	2
		9
10		

Решение

1. Обозначим отсутствующее число буквой a. Тогда, так как частное элементов, стоящих в соседних столбцах, равно:
$15 : (-5) = -3$, имеет место уравнение $3 : a = -3$.
Отсюда следует: $a = -3 : 3 = -1$.

Следовательно, волшебная таблица:

−1	3
−5	15

Результат можно проверить разными способами:

- вычислить волшебное число:
  $-1 \cdot 15 = -15$; $-5 \cdot 3 = -15$;
- вычислить отношение элементов, стоящих в соседних строчках:
  $-5 : (-1) = 5$; $15 : 3 = 5$.

2. Обозначим отсутствующие числа буквами:

5	−4	2
a	*b*	9
10	*c*	*d*

Тогда, так как отношение элементов, стоящих во второй и первой строках, равно $9 : 2 = 4{,}5$, имеют место уравнения: $a : 5 = 4{,}5$; $b : (-4) = 4{,}5$.

Отсюда следует: $a = 4{,}5 \cdot 5 = 22{,}5$; $b = 4{,}5 \cdot (-4) = -18$.

Внесём полученные результаты в таблицу:

5	−4	2
22,5	−18	9
10	*c*	*d*

Отношение элементов, стоящих в третьей и второй строках, равно: $10 : 22{,}5$.

В результате имеем число, которым неудобно пользоваться. Но мы не обязаны рассматривать только соседние строки. Так, отношение элементов, стоящих в третьей и первой строках, равно $10 : 5 = 2$.

И это, конечно, более удобный вариант. В этом случае имеют место уравнения: $c : (-4) = 2$; $d : 2 = 2$.

И потому: $c = 2 \cdot (-4) = -8$; $d = 2 \cdot 2 = 4$.

Итак, волшебная таблица:

5	−4	2
22,5	−18	9
10	−8	4

Проверим результат, вычислив волшебное число разными способами:

$$5 \cdot (-18) \cdot 4 = -360;\ -4 \cdot 22{,}5 \cdot 4 = -360;\ 2 \cdot 22{,}5 \cdot (-8) = -360.$$

440. Вставьте недостающие числа в следующие таблицы, а затем убедитесь в том, что получились волшебные умножательные таблицы.

1)

8	
3	−6

2)

10	−12
2,5	

3)

18	
4	8

4)

−5	12
	30

441. Вставьте недостающие числа в следующие таблицы, а затем убедитесь в том, что получились волшебные умножательные таблицы.

1)

1,8		
3	−6	8
12		

2)

		12
−4		
−10	12	15

3)

18	4,5	
1		8
−2		

4)

−6		
	3	
1,5	2	5

442. Сочините две задачи, подобные задачам, рассмотренным в данном параграфе.

1.9. Волшебные таблицы и пропорции

Пришёл Чебурашка к крокодилу Гене и зовёт его пойти погулять. Гена не соглашается, говоря, что ему в школе задали пропорции, а он ещё с ними не разобрался. «Так это же совсем просто. Возьми члены пропорции и вставь их в таблицу», – сказал Чебурашка. Гена ответил: «Хорошо. Я беру пропорцию 6 : 30 = 17 : 85 и ставлю эти числа в таблицу. Ну и что?» «Какой ты недогадливый!» – набросился на него Чебурашка.

А вы уже догадались, в чём дело?

6	17
30	85

Конечно! Таблица является волшебной умножательной.

443. Составьте три разные пропорции, вставьте члены каждой из них в таблицу и проверьте: получается ли волшебная умножательная таблица размера 2 × 2?

Сформулируйте полученный результат в общем виде.

Как вы помните, Чебурашка много занимался волшебными таблицами и стал крупным специалистом в умножательных таблицах. Он не только заметил, что члены любой пропорции образуют волшебную умножательную таблицу размера 2 × 2. Он также понял, что справедлив и обратный результат.

Задача

Проверьте, являются ли следующие таблицы волшебными умножательными.

1)

2	−7
−41	143,5

2)

5	−2	12
−7	2,8	−16,8
25	−10	60

Составьте отношения из элементов этих таблиц, стоящих в одной строке или одном столбце, и убедитесь в том, что они образуют пропорцию.

Решение

1) $2 \cdot 143{,}5 = 287$; $(-41) \cdot (-7) = 287$; таблица волшебная. Отношения, составленные по столбцам: $2 : (-41)$ и $(-7) : 143{,}5$, а также по строкам: $2 : (-7)$ и $(-41) : 143{,}5$, составляют пропорцию.

В этом легко убедиться, использовав основное свойство пропорции:

$2 \cdot 143{,}5 = (-41) \cdot (-7)$.

2) $5 \cdot 2{,}8 \cdot 60 = 840$; $(-2) \cdot (-16{,}8) \cdot 25 = 840$; $12 \cdot (-7) \cdot (-10) = 840$; таблица волшебная.

Отношения, составленные по столбцам:

$5 : (-7)$ и $(-2) : 2{,}8$; $5 : 25$ и $(-2) \cdot (-10)$;

$2{,}8 : (-10)$ и $(-16{,}8) : 60$, составляют пропорцию. В этом легко убедиться, использовав основное свойство пропорции.

То же самое происходит и с отношениями, составленными по строкам:

$(-7) : 2{,}8$ и $25 : (-10)$; $(-7) : (-16{,}8)$ и $25 : 60$;

$(-2) : 12$ и $(-10) : 60$.

То, что это не случайность, легко понять, вспомнив характеристическое свойство умножательных таблиц:

> Элементы, стоящие в разных строках одного столбца, отличаются на один и тот же сомножитель. То же самое справедливо и для элементов, стоящих в разных столбцах одной строки.

444. Составьте отношения из элементов этих таблиц, стоящих в одной строке или одном столбце, и убедитесь в том, что они образуют пропорцию.

a)

1,2	0,4
−15	−5

b)

15	−0,4	2
75	−2	10
3,75	−0,1	0,5

445. Проверьте, являются ли следующие таблицы волшебными умножательными.

a)

11	−3
−5,5	1,5

b)

−7	0,14	42
−21	0,42	126
−3	0,06	18

446. Составьте отношения из элементов таблиц из упражнения 106, стоящих в одной строке или одном столбце, и убедитесь в том, что они образуют пропорцию.

1.10. Волшебные таблицы и степени

Чебурашка продолжает размышлять о волшебных таблицах. Составив несколько умножательных таблиц, он обнаружил интересную закономерность.

447. Убедитесь в том, что следующие равенства верны. Что можно сказать о показателях степени?

a)

2^5	2^4
2^4	2^3

c)

7^3	7^5	7^2
7^2	7^4	7
7^5	7^7	7^4

b)

6^7	6^8
6^5	6^6

d)

3^7	3^{11}	3^4
3^5	3^9	3^2
3^4	3^8	3

Задача

Вставьте недостающие числа в умножательные таблицы.

1)

5^2	5^{11}
5^7	

2)

2^4	2^9	2^7
2^7	2^{12}	
2^5	2^{10}	

Решение

1) Обозначив недостающий элемент через 5^a, увидим, что таблица

5^2	5^{11}
5^7	5^a

будет волшебной, если $5^2 \cdot 5^a = 5^7 \cdot 5^{11}$. Тогда $5^{2+a} = 5^{18}$. Равенство будет иметь место, если $2 + a = 18$. Отсюда $a = 16$.

В то же время из равенства $5^2 \cdot 5^a = 5^7 \cdot 5^{11}$ можно получить $5^2 \cdot 5^a = 5^{18}$.

Разделив обе части уравнения на 5^2, получим, что $5^a = \frac{5^{18}}{5^2}$.

Сравнив с полученным ранее, так как $a = 16$, получим, что $\frac{5^{18}}{5^2} = 5^{16}$. В итоге можем сформулировать ещё одно свойство степени.

При делении степенных выражений, если основания одинаковы, показатели степени вычитаются: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

2) Проверим сформулированное свойство на следующем примере. Обозначим недостающие элементы таблицы через 2^b и 2^c.

2^4	2^9	2^7
2^7	2^{12}	2^b
2^5	2^{10}	2^c

Нетрудно установить, что волшебным числом для этой таблицы является число: $2^5 \cdot 2^{12} \cdot 2^7 = 2^{5+12+7} = 2^{24}$.

Отсюда следует, что $2^4 \cdot 2^{12} \cdot 2^c = 2^{24}$; $2^{16} \cdot 2^c = 2^{24}$.

Тогда $16 + c = 24$; $c = 8$.

В то же время $2^{16} \cdot 2^c = 2^{24}$; $2^c = \frac{2^{24}}{2^{16}}$.

Итак, результат вычисления числа c подтверждает справедливость равенства $\frac{2^{24}}{2^{16}} = 2^{24-16}$.

Взяв тройку чисел, включающую число b, например, 2^5, 2^9 и 2^b, получим уравнение $2^5 \cdot 2^9 \cdot 2^b = 2^{24}$. Тогда $5 + 9 + b = 24$ и отсюда $b = 10$.

448. Вставьте недостающие числа в волшебные умножательные таблицы.

a)

6^9	
6^5	6^{11}

c)

	7^6	7^2
7^4	7^7	
	7^{11}	7^7

b)

	8^7
8^5	8^9

d)

3^{11}	3^9	
	3^{15}	3^8
		3^{12}

449. Вставьте недостающие числа в волшебные умножательные таблицы.

a)

10^5	10^{21}
10^{16}	

c)

	9^3	9^{10}
	9^7	9^{14}
9^3	9^5	9^{12}

b)

$1{,}6^2$	$1{,}6^5$
	$1{,}6^7$

d)

	4^9	
4^{18}	4^{13}	
	4^6	4^8

450. Сочините две задачи, подобные задачам, рассмотренным в данном параграфе.

1. Определите, какие из волшебных таблиц являются слагательными, какие – умножательными. Для каждой таблицы вычислите волшебное число.

a)

8	−1
3	−6

b)

10	1,2
2,5	0,3

c)

18	−12
−12	8

d)

−5	12
13	30

e)

8	−11	3
13	−6	8
2	−17	−3

f)

−8	16	12
4	−8	−6
−1	2	1,5

g)

1,8	3	8,8
1	2,2	8
−2	−0,8	5

h)

2,5	10	25
10	40	100
0,5	2	5

2. Вставьте недостающие числа в таблицы так, чтобы получились волшебные слагательные таблицы.

a)

85	60
−17	

b)

−52	
1,3	−9,1

c)

	30	−15
		−3
231	33	

d)

	15	
6,3	9	1,8
21		

3. Вставьте недостающие числа в таблицы так, чтобы получились волшебные умножательные таблицы.

a)

85	60
−17	

b)

−52	
1,3	−9,1

c)

	30	−15
		−3
231	33	

d)

	15	
6,3	9	1,8
21		

4. Дополните волшебную умножательную таблицу так, чтобы получилось волшебное число: a) 7,2; b) − 48; c) 3; d) 3,9.

a)

15	−60

b)

	2,4
	−32

c)

0,25	
−1,5	

d)

−0,065	13

5. Представьте число a) − 72; b) 0,47; c) − 1,5 в виде суммы четырёх слагаемых.

6. Представьте число a) 1,2; b) − 23; c) − 0,03 в виде суммы шести слагаемых.

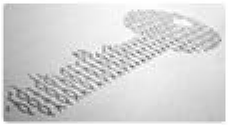
7. Представьте число a) − 72; b) 0,49; c) − 1,5 в виде произведения четырёх сомножителей.

8. Представьте число a) 1,2; b) − 22; c) 0,36 в виде произведения шести сомножителей.

9. Составьте волшебную слагательную и волшебную умножательную таблицы размера 2 × 2, которые дают в результате число: a) − 52; b) 0,12.

10. Составьте волшебную слагательную и волшебную умножательную таблицы размера 3 × 3, которые дают в результате число: a) − 72; b) 1,12.

A2. Криптография



Будучи пятиклассниками, вы познакомились с началами криптографии – искусства написания и прочтения шифрованных (секретных) сообщений. Надеемся, что вам было интересно.

В данном параграфе мы повторим материал и ознакомимся с другим способом составления и прочтения секретных сообщений.

2.1. Одинарный шифр

Простейшие шифры предполагают замену букв какими-нибудь знаками, например, числами. Давайте договоримся, что число 21 обозначает букву А, число 22 – букву Б и так далее, согласно таблице 1.

Таблица 1

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я	Ө	Ү	Ң
45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56

Тогда имя главного героя знаменитого сериала «Семнадцать мгновений весны» будет зашифровано следующим образом.

Под каждой буквой, в соответствии с таблицей 1, пишем число:

Ш	Т	И	Р	Л	И	Ц
46	40	30	38	33	30	44

М	А	К	С	И	М
34	21	32	39	30	34

И	С	А	Е	В
30	39	21	26	23

Далее соединяем полученные числа знаками плюс и минус в произвольном порядке, для того чтобы придать сообщению вид упражнений по математике:

$46 + 40 - 30 - 38 + 33 - 30 = 44$ $\quad 34 + 21 - 32 - 39 + 30 = 34$

$30 + 39 + 21 - 26 = 23$, и шифровка готова.

Получив шифрованное сообщение:

$29 + 21 - 23 - 40 + 38 = 21$ $\quad 40 + 26 + 39 = 40$,

используем таблицу 1, для того чтобы заменить числа на буквы:

29	21	23	40	38	21
З	А	В	Т	Р	А

40	26	39	40
Т	Е	С	Т

и понимаем, что время на развлечения сегодня нужно сократить, чтобы постараться получить высокую отметку.

451. Зашифруйте фразу: МАТЕМАТИКА – ЦАРИЦА НАУК.

452. Прочитайте шифровку:

32 − 41 − 38 + 30 − 40 = 50   23 − 38 − 26 + 25 − 35 = 36

2.2. Двойной шифр

Более сложные шифры получаются, если не ограничиваться заменой букв знаками, а проделать что-нибудь еще с этими знаками.

Итак, давайте зашифруем имя великого математика Карла Фридриха Гаусса двойным шифром. Вначале по таблице 1 поменяем буквы на числа.

К	А	Р	Л
32	21	38	33

Ф	Р	И	Д	Р	И	Х
42	38	30	25	38	30	43

Г	А	У	С	С
24	21	41	39	39

Затем разделим первое, третье, пятое и так далее числа на 2:

К	А	Р	Л
32	21	38	33
16		19	

Ф	Р	И	Д	Р	И	Х
42	38	30	25	38	30	43
21		15		19		21,5

Г	А	У	С	С
24	21	41	39	39
	10,5		19,5	

а от всех остальных чисел отнимем 20.

К	А	Р	Л
32	21	38	33
16	1	19	13

Ф	Р	И	Д	Р	И	Х
42	38	30	25	38	30	43
21	18	15	5	19	10	21,5

Г	А	У	С	С
24	21	41	39	39
14	10,5	21	19,5	19

Шифровка готова:

16 + 1 + 19 = 13   21 + 18 − 15 + 5 + 19 − 10 = 21,5

14 − 10,5 + 21 + 19,5 = 19

Давайте прочитаем шифровку, которая написана этим двойным ключом:

15 + 19 = 10,5   1 + 21,5 − 21 + 17,5 − 2 + 10,5 − 6 = 11,5.

Вначале умножим первое, третье, пятое и так далее числа на 2:

15	19	10,5
30		21

1	21,5	21	17,5	2	10,5	6	11,5
	43		35		21		23

затем, прибавим к оставшимся числам 20.

15	19	10,5
30	39	21

1	21,5	21	17,5	2	10,5	6	11,5
21	43	41	35	22	21	26	23

В итоге, мы готовы воспользоваться таблицей 1:

30	39	21
И	С	А

21	43	41	35	22	21	26	23
А	Х	У	Н	Б	А	Е	В

Итак, мы выяснили, что были зашифрованы имя и фамилия выдающегося хирурга.

453. Используйте двойной шифр, чтобы зашифровать имя и фамилию великого манасчи: САЯКБАЙ КАРАЛАЕВ.

454. Прочитав шифровку, узнайте, кого Манас отправил в разведку перед Великим походом:

10,5 − 13 + 17 − 1 − 17 + 2 − 13 = 20

19,5 − 29 +19 + 4 − 10,5 = 12

455. Используйте двойной шифр для того чтобы зашифровать имя и фамилию великого артиста: МУРАТБЕК РЫСКУЛОВ.

456. Расшифруйте фразу:

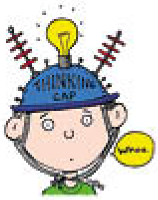
$16 - 16 + 19 - 16 - 16{,}5 = 30$
$16{,}5 - 10 = 19$

457. Зашифруйте ваше имя и фамилию, используя таблицу 1.

458. Напишите шифрованные сообщения, обменяйтесь ими с одноклассником, сидящим на другом ряду. Прочитайте его сообщение.

459. Зашифруйте имя и фамилию вашего дедушки, используя двойной шифр.

460. Сочините две задачи, подобные задачам, рассмотренным в данном параграфе.



1. Используя таблицу 1, зашифруйте сообщения.

a) ВЫУЧИ УРОКИ   b) ЛЮБЛЮ МОРОЖЕНОЕ

2. Используя таблицу 1, расшифруйте сообщения.

a) 52 + 33 = 53   25 − 36 − 22 + 38 + 21 = 53
b) 24 − 41 + 33 + 50 − 35 + 41 = 38 43 − 41 + 25 + 22 − 26 = 40

3. Используя двойной шифр, зашифруйте сообщения.

a) КАЛЫК АКИЕВ   b) ЮРИЙ ГАГАРИН

4. Используя двойной шифр, прочитайте сообщения.

a) 19 + 16 − 11 − 10 + 17,5 − 9 + 18 = 15   16 − 18 − 20,5 − 19 = 18
b) 12,5 − 1 − 17,5 + 10 − 25,5 + 13 = 25   5 + 13 − 22 = 18

A3. Тестовые задания на внимание, логику, сообразительность

При проверке знаний часто используют задачи множественного выбора, в которых правильным ответом является один из нескольких предложенных. В этом параграфе мы предлагаем 40 таких задач. Их можно решать как в течение учебного года, так и на каникулах.

1) Вычислите.

$$140\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{3}{7}\right)$$

a) 5 b) -1 c) 3 d) 7 e) $\frac{4}{7}$ f) $\frac{5}{28}$

2) Вычислите $a - b$, зная, что $\begin{cases} a+b=7 \\ a+2b=9 \end{cases}$

a) 12 b) 2 c) 3 d) 13 e) 4 f) 5

3) Вычислите y, зная, что $\begin{cases} x+y=z-y \\ x-y-z=9 \end{cases}$

a) -2 b) 2 c) -3 d) 13 e) 4 f) -5

4) Выражение $2x - [x + (x + y) - (x - 2y)]$ равно:

a) $-x + 2y$ b) $x + 3y$ c) $x - 3y$ d) $2x - y$ e) $2x + 3y$ f) $x - y$

5) У скольких двузначных натуральных чисел сумма цифр равна пяти?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

6) У скольких двузначных натуральных чисел сумма цифр, умноженная на 4, равна этому числу?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

7) Если a, b, c – последовательные натуральные числа, то

$(a - b + 2)(a - c - 1)(c - a)$ равно: a) -2 b) 2 c) -3 d) -6 e) 4 f) -5

8) Если x и y – целые числа и $3x + 4y = 25$, то можно утверждать, что

I. x – нечётное число;

II. y – чётное число;

III. $x \cdot y > 0$.

a) Верно только I.
b) Верно только II.
c) Верно только III.
d) Верно только I и II.
e) Верно только I и III.
f) Верно только II и III.

9) Если $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 1776$, то сумма цифр a, b, c равна:

a) 16 b) 12 c) 23 d) 14 e) 15 f) 26

10) Если сумма всех трёхзначных чисел, составленных с использованием каждой из цифр a, b, c, равна 1554, то чему равна сумма этих цифр?

a) 9 b) 8 c) 7 d) 6 e) 5 f) 4

11) Товар, который стоил $\frac{8p}{7}$ сомов, после скидки продали за p сомов. Чему равен процент скидки?

a) 16 b) 12,5 c) 23 d) 14,5 e) 15 f) 26,5

12) Стаканчик йогурта весил 250 *г*. После того как выпили четверть йогурта, стаканчик весит 195 *г*. Каков вес пустого стаканчика?

a) 26 b) 15 c) 25 d) 45 e) 50 f) 30

13) Уля планировала продать 60 футболок по цене 20 лир. Однако выяснилось, что 12 футболок имеют дефект, и их продали по 12 лир. По какой цене были проданы оставшиеся футболки, если в итоге Уля получила изначально запланированную выручку?

a) 26 b) 22,5 c) 23 d) 24,5 e) 25 f) 22

14) Бракованная линейка при измерении даёт результат на 5% меньше истинной длины. С помощью этой линейки определили площадь квадрата. На сколько процентов полученный результат меньше истинного?

a) 19 b) 8,25 c) 7,75 d) 9,75 e) 25 f) 10

15) На четырёх полках имеются 16, 20, 23, 25 книг соответственно. Какое наименьшее число книг нужно переставить, чтобы на каждой полке было одинаковое число книг?

a) 9 b) 8 c) 7 d) 6 e) 5 f) 4

16) Длина прямоугольной крыши 15 *м*, периметр – 46 *м*. Сколько весит снег на крыше, если снег, покрывающий 5 *м*², весит 60 *кг*?

a) 1980 b) 1280 c) 1740 d) 1600 e) 1950 f) 1440

17) Некоторую работу за 15 дней могут выполнить 8 работников, работая по 8 часов в день. За сколько дней выполнят эту работу 12 работников, работая по 5 часов в день?

a) 19 b) 18 c) 17 d) 16 e) 15 f) 14

18) В 9 пакетах находится 60 жвачек. Известно, что в одних пакетах имеются пять жвачек, в других – десять. В скольких пакетах десять жвачек?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

19) После того как Гульнара обменяла 60 баранов на 15 коров, рыночная стоимость её стада увеличилась на 3000 лир. Какова рыночная стоимость коровы, если рыночная стоимость барана 750 лир?

a) 3516 b) 3200 c) 3500 d) 3140 e) 3150 f) 3000

20) Дерево за 4 года вырастает на 20%. Какой была высота этого дерева в 2002 году, если в 2014 она была 2,592 *м*?

a) 1,9 b) 1,8 c) 1,7 d) 1,6 e) 1,5 f) 1,4

21) Там, где Эсен делает 2 шага, Элиза делает 3 шага. Сделав по 50 шагов из одной точки и в одном направлении, они оказались на расстоянии 10 метров друг от друга. Какова длина шага Эсена?

a) 0,9 b) 0,8 c) 0,7 d) 0,6 e) 0,5 f) 0,4

Следующую информацию используйте для ответа на вопросы 22–23. Эти вопросы не зависят друг от друга.

В таблице приведено время, необходимое одному работнику для выполнения каждого из четырёх этапов работы по изготовлению ковра.

Этапы	1	2	3	4
Время	3	6	8	10

22) Первый этап работы выполнил один работник. Далее к нему присоединились ещё двое, и вместе они закончили работу. За сколько дней был изготовлен ковёр?

a) 9 b) 10 c) 11 d) 12 e) 13 f) 14

23) Первый и второй этап работы выполнили три работника, работая вместе. Далее один из них прекратил работу, и ковёр закончили оставшиеся. За сколько дней был изготовлен ковёр?

a) 9 b) 10 c) 11 d) 12 e) 13 f) 14

Следующую информацию используйте для ответа на вопросы 24–25. Эти вопросы не зависят друг от друга.

В таблице приведены названия фирм-спонсоров математической олимпиады, а также соответствующие объёмы спонсорской помощи в денежном выражении и в процентах.

Фирмы	«Альфа»	«Бета»	«Гамма»	«Дельта»	«Эпсилон»	Всего
Помощь в сомах	12000	6000			3000	
Помощь в %			18	22		100

24) Определите объём спонсорской помощи, оказанной фирмой «Дельта», в денежном выражении.

a) 7900 b) 7700 c) 8110 d) 7612 e) 8230 f) 7400

25) Определите объём спонсорской помощи, оказанной фирмой «Эпсилон», в процентном выражении.

a) 9,11 b) 8,77 c) 8,11 d) 7,12 e) 8,57 f) 7,14

Следующую информацию используйте для ответа на вопросы 26–27.

При приёме на работу фирма основывается на четырёх критериях, которые оцениваются исходя из следующих баллов:

Отзывчивость	Общительность	Предприимчивость	Наличие опыта
18	22	28	32

При этом, чтобы быть принятым, претендент должен набрать не меньше половины возможных баллов по каждому критерию и не меньше 70 баллов в сумме.

26) Оксана была принята на работу, набрав 28 баллов по критерию «Наличие опыта» и 26 баллов по критерию «Предприимчивость». Какое минимально возможное количество баллов получила Оксана?

a) 94 b) 77 c) 84 d) 72 e) 78 f) 74

27) Мартин набрал больше баллов, чем Оксана, но не был принят на работу. Какое максимально возможное количество баллов получил Мартин?

a) 79 b) 82 c) 91 d) 90 e) 87 f) 94

Следующую информацию используйте для ответа на вопросы 28–29. Эти вопросы не зависят друг от друга.

Часы Эльдара спешат на 4 минуты, а часы в автобусе отстают на 3 минуты.

28) Эльдар сел в автобус, когда на его часах было 16:45, и вышел из автобуса, когда на часах в автобусе было 17:19. Сколько минут Эльдар провёл в автобусе?

a) 29 b) 27 c) 48 d) 41 e) 38 f) 56

29) Эльдар вышел из дома и через 7 минут сел в автобус. Через полчаса он вышел из автобуса, когда на часах в автобусе было 11:23. В какое время, по своим часам, Эльдар вышел из дома?

a) 10:39 b) 10:53 c) 11:03 d) 10:42 e) 10:37 f) 10:49

Следующую информацию используйте для ответа на вопросы 30–31. Эти вопросы не зависят друг от друга.

В таблице указаны ставки интереса, по которым можно поместить деньги на депозит.

	Ставка интереса (в %)	
	Менее 50 000 сомов	50 000 сомов или больше
На 6 месяцев	5	6
На 9 месяцев	7	8
На 12 месяцев	9	10

Пример. Поместив 10 000 на 9 месяцев, можно получить доход $10\,000 \cdot 0{,}07 \cdot (9/12) = 525$ сомов.

В финансовых операциях указывается годовая ставка; 9/12 – это 9 месяцев в годовом выражении.

30) Элида за 6 месяцев получила доход 1200 сомов. Сколько денег она положила на депозит?

a) 29 000 b) 27 000 c) 48 000 d) 41 500 e) 38 600 f) 56 000

31) Эсентур вложил 73 500 сомов на 9 месяцев. Сколько денег он должен вложить на 12 месяцев, чтобы получить такой же доход?

a) 39 000 b) 57 000 c) 48 000 d) 44 100 e) 49 000 f) 50 000

Следующую информацию используйте для ответа на вопросы 32–33. Эти вопросы не зависят друг от друга.

Маляр перемешивает красную (R), белую (W) и чёрную (B) краски, чтобы получить коричневую краску, в следующих отношениях:

$$\frac{R}{W} = \frac{1}{2};\ \frac{W}{B} = \frac{3}{4}.$$

32) Маляр использовал 2,1 *кг* красной краски для получения коричневой. Сколько чёрной краски было использовано при этом?

a) 2,9 b) 2,7 c) 4,8 d) 4,5 e) 8,6 f) 5,6

33) Сколько белой краски понадобится для получения 8,5 *кг* коричневой краски?

a) 3 b) 5 c) 4,8 d) 4,5 e) 2,2 f) 2,5

Следующую информацию используйте для ответа на вопросы 34–36. Эти вопросы не зависят друг от друга.

В клетках записаны натуральные числа. При этом выделенные числа равны произведению двух ближайших к ним чисел.

Например:

28

4 7

20 5 **35**

34) Найдите сумму $a + b + c$.

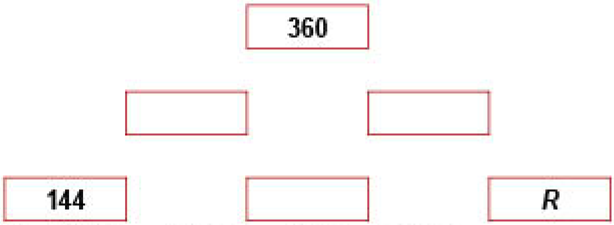
56

a b

24 c **21**

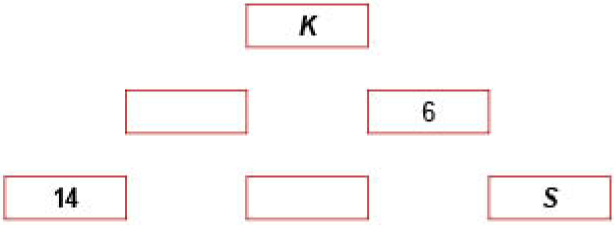
a) 19 b) 27 c) 14 d) 15 e) 18 f) 16

35) Какому числу не может быть равно *R*?



a) 640 b) 600 c) 810 d) 5760 e) 10 f) 6480

36) Найдите произведение *KS*.



a) 194 b) 274 c) 824 d) 504 e) 186 f) 1176

Следующую информацию используйте для ответа на вопросы 37–39. Эти вопросы не зависят друг от друга.

В компьютерную программу вводят натуральные числа, и она работает до тех пор, пока на выходе не появится число 1.

<table>
<tr><td colspan="3">1. Ввод</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Прочитать число N.
Если число N чётное, то выполнить 31, иначе – выполнить 32.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">31. k = N/2</td><td colspan="2">32. Если число N простое,
то выполнить 301, иначе – выполнить 302.</td></tr>
<tr><td>301. k = (N+1)/2</td><td>302. k = (3N+1)/2</td></tr>
<tr><td colspan="3">4. Прочитать число k.
Если k = 1, то выполнить 5, иначе N = k и выполнить 2.</td></tr>
<tr><td colspan="3">5. Закончить.</td></tr>
</table>

Например, если в программу вводится число 12, то программа закончит работу, выполнив четыре цикла: 12; 6; 3; 2; 1. Если же в программу вводится число 25, то программа закончит работу, выполнив семь циклов: 25; 38; 19; 10; 5; 3; 2; 1.

37) Если в программу вводится число 18, то в процессе работы программы число N не может быть равно:

a) 7; b) 14; c) 9; d) 2; e) 3; f) 4.

38) Если в программу вводится число 41, то программа закончит работу, выполнив x циклов. Число x равно:

a) 3; b) 4; c) 5; d) 6; e) 7; f) 8.

39) В программу вводится нечётное число. На втором цикле программа определяет, что N является чётным, и в итоге получается, что $k = 7$. Какое число было введено в программу?

a) 9 b) 11 c) 13 d) 15 e) 17 f) 19

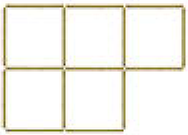
40) Определите площадь многоугольника $ABCDEF$, вершины которого имеют следующие координаты: $a(-1; 0)$, $b(0; 3)$, $c(2; 4)$, $d(0; 0)$, $e(2; -4)$, $f(0; -3)$.

a) 11 b) 10 c) 9 d) 8 e) 7 f) 6

Ответы к упражнениям

§ 1. Задачи на повторение

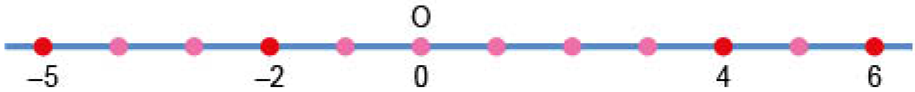
I. **1.** ДА. **2.** 1) ДА; 2) НЕТ; 3) ДА. **3.** 1) НЕТ; 2) НЕТ. **4.** 1) ДА; 2) НЕТ. **5.** 1) ДА; 2) НЕТ. **6.** 1) ДА; 2) НЕТ. **7.** 1) ДА; 2) НЕТ; 3) НЕТ. **8.** 1) НЕТ; 2) ДА. **9.** 1) ДА; 2) НЕТ (12-ю способами). **10.** 1) ДА; 2) НЕТ. **11.** 1) НЕТ; 2) ДА. **12.** 1) ДА; 2) ДА.



II. **13.** 4. **14.** 2. **15.** 1. **16.** 4. **17.** 4. **18.** 3. **19.** 3. **20.** 1. **21.** 3 (910 − 109). **22.** 4. **23.** 3. **24.** 5. **25.** 5. **26.** 2. **27.** 4. **28.** 2. **29.** 3. **30.** 1.

§ 2. Числовая ось. Уравнения с модулем

31. Самое маленькое из этих чисел −3, следующее −1, затем 1, далее 2 и потом 5. **32.** Самое маленькое из этих чисел −5, следующее −2, затем 0, после него 4 и потом 6.

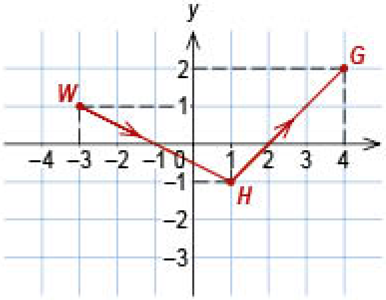


33. $|3| > |-1|$; $|3| > |2|$; $|3| > |1|$; $|3| < |5|$; $|3| = |-3|$.
34. $|4| < |-7|$; $|4| > |-2|$; $|4| > |2|$; $|4| > |-3|$.
35. a) $|AN| = 5{,}3$; b) $|TO| = 2{,}2$; c) $|NI| = 0{,}9$; d) $|NA| = 10{,}2$; e) $|UN| = 9{,}9$.
36. a) $|AL| = 10{,}6$; b) $|MA| = 12{,}2$; c) $|MB| = 0{,}5$; d) $|ET| = 1{,}97$.
37. a) 16,4; b) 36,9; c) 8,55; d) 60,5; e) 18,56; f) 2,9.
38. a) 22,8; b) 21,5; c) 47,6; d) 2,2; e) 6; f) 11.
39. a) 225 *л*; b) 180 *л*; c) −15 *л*; d) −180 *л*.
40. a) 230 *кг*; b) 90 *кг*; c) −60 *кг*; d) −120 *кг*.
41. 83 сома. **42.** \$247 сомов.
43. a) $x = 7{,}13$; $x = 3{,}11$; b) $x = 15{,}21$; $x = -8{,}79$;
c) $x = -0{,}16$; $x = -4{,}58$; d) $x = -1{,}586$; $x = -3{,}814$.
44. a) $x = 1{,}82$; $x = 1{,}18$; b) $x = 2{,}15$; $x = 0{,}75$;
c) $x = 4{,}1$; $x = -11{,}9$; d) $x = -0{,}14$; $x = -2{,}72$.
45. 178 *км*; −333 *км*. **46.** 20 *км*; −15,7 *км*. **47.** 0,75 *ч*. **48.** 15,7 *ч*.
49. a) $x = 0{,}625$; $x = -0{,}625$; b) $x = 2{,}95$; $x = -2{,}55$; c) $x = -5{,}8$; $x = -2{,}2$.
50. a) $x = 3{,}5$; $x = -3{,}5$; b) $x = -0{,}38$; $x = -0{,}46$; c) $x = -2{,}5$; $x = -3{,}5$.
51. $\angle COB = 53°$; $\angle BOD = 127°$. **52.** $\angle KUN = 123{,}75°$; $\angle LUN = 56{,}25°$.
53. 360°. **54.** $\angle IOH = 103°$; $\angle HOJ = 77°$. **55.** $\angle HJF = 80°$; $\angle HJE = 100°$.
56. 7°.

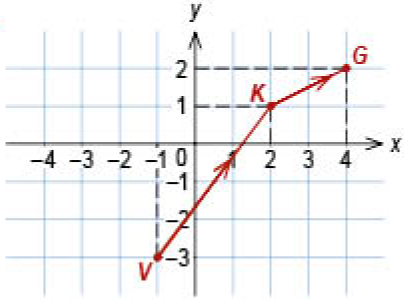
1. a) 24; b) −8; c) 4,2; d) −2,4; e) −10; f) −6,5; g) −3,17; h) −20,5; i) −9,8; j) 0,1. 2. a) 510; b) 238,8; c) 686; d) 12,8; e) 418,5; f) 1637; g) 294,5; h) 923,77; i) 532,02; j) 4399,51. 3. a) $|LE| = 5{,}9$; b) $|AN| = 3{,}4$; c) $|BU| = 25{,}4$; d) $|RO| = 12$; e) $|VA| = 4{,}57$. 4. 200. 5. −192. 6. a) $x = 6{,}625$; $x = -5{,}625$; b) $x = -0{,}88$; $x = 0{,}04$; c) $x = 0{,}44$; $x = -2{,}3$. 7. Через 1,75 ч (если не встретятся). Через 3,25 ч (после встречи). 8. $\angle IOH = 37°$; $\angle HOJ = 143°$. 9. $\angle HJF = 52{,}5°$; $\angle HJE = 127{,}5°$. 10. 45°; 60°; 75°. 11. 172°.

§ 3. Прямоугольная система координат на плоскости

57.



58.



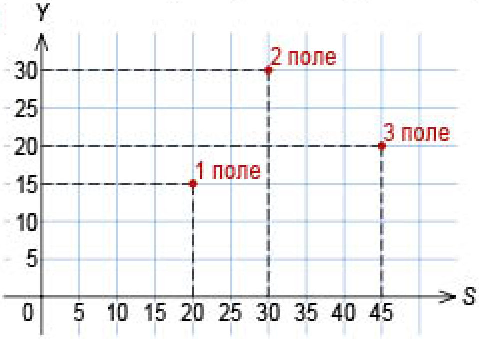
59. В первый день Колобок продал 6 пирожков по цене 4 копейки, во второй день 5 по цене 5 копеек и в третий день 8 пирожков по цене 3 копейки.

60.

(Здесь на оси P отмечена цена, на оси Q – количество рыбин.)

61. В первом туре 12 игроков забили 20 голов, во втором туре 14 игроков забили 15 голов, в третьем туре 20 игроков забили 25 голов.

62.



(Здесь на оси Y отмечена урожайность, на оси S – площадь поля.)

63. a) КЛАСС; b) ТЕКСТ.

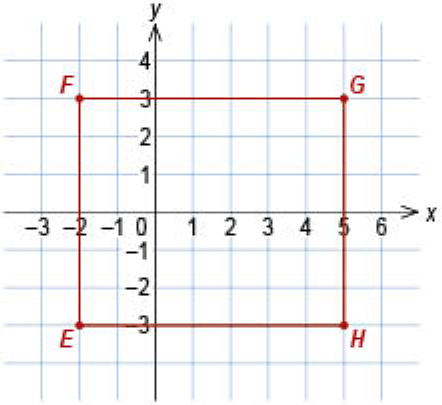
64. a) (6; −2) (−3; −2) (4; 4); b) (6; 3) (6; −2) (−4; 4) (5; 1) (−4; 4) (4; 4).

65. a) СТАКАН; b) ТАЛАС.

66. a) (4; 4) (−4; 4) (6; 3) (4; 4); b) (6; 3) (2; 6) (−5; 4) (4; 4) (−3; −2) (3; −4).

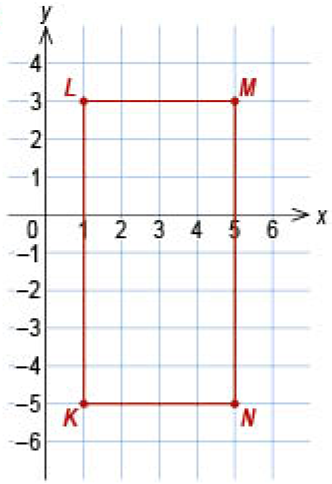
68. 1a) Семипалатинск 1b) Кызылорда
2a) (0,1; −6,1) 2b) (3; −5,9)
3a) Шымкент 3b) Караганда.
4a) (0; 0) 4b) (2,3; 1,3)

69.



Площадь равна 7 · 6 = 42.

70.

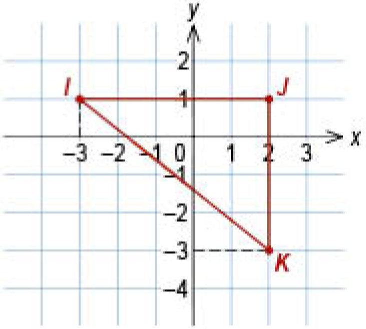


Площадь равна 4 · 8 = 32.

71. Площадь 21, катеты *FG* и *GH*, гипотенуза *FH*.

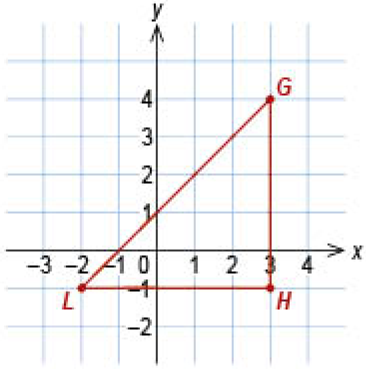
73. Площадь 16, катеты *KL* и *KN*, гипотенуза *LN*.

72.



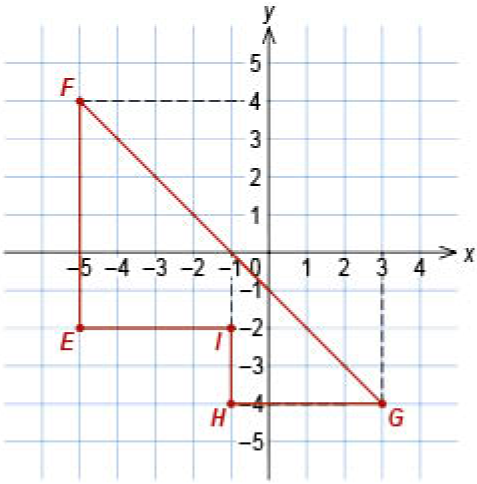
Площадь 10,
катеты *IJ* и *JK*,
гипотенуза *IK*.

74.



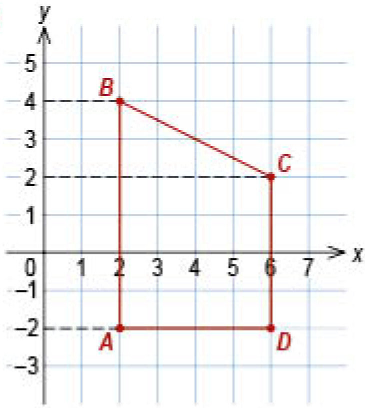
Площадь 12,5,
катеты *LN* и *MN*,
гипотенуза *LM*.

75.



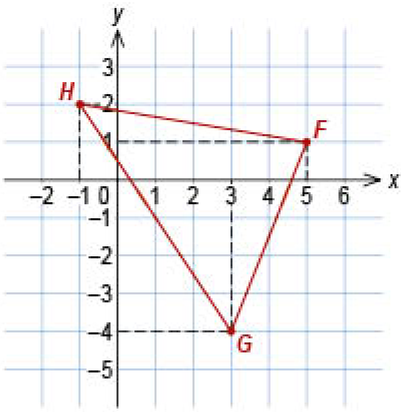
Площадь 24.

76.



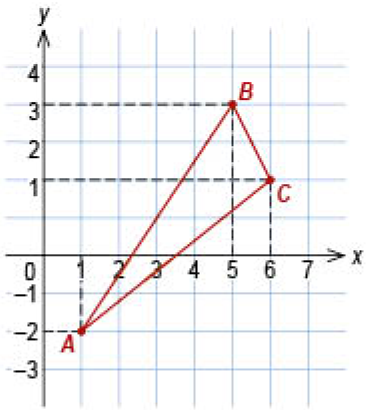
Площадь 20.

77.



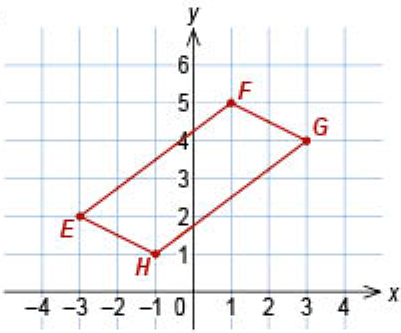
Площадь 16.

78.



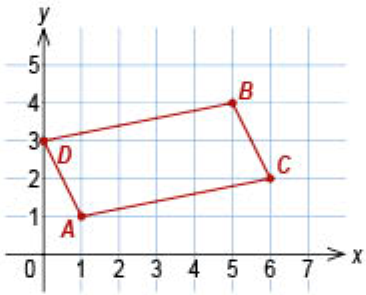
Площадь 9.

79.



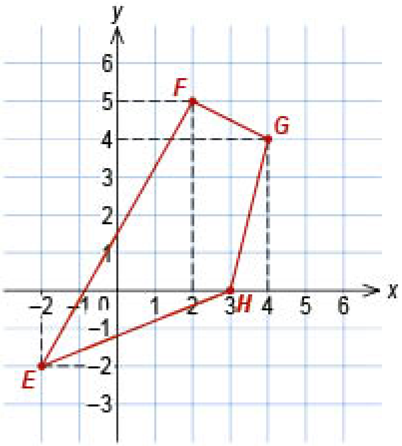
Площадь 10.

80.



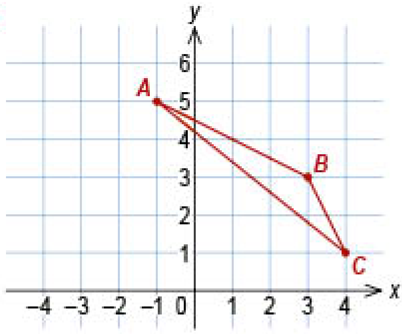
Площадь 11.

81.



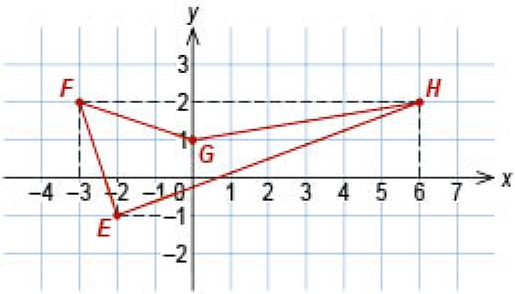
Площадь 18.

82.



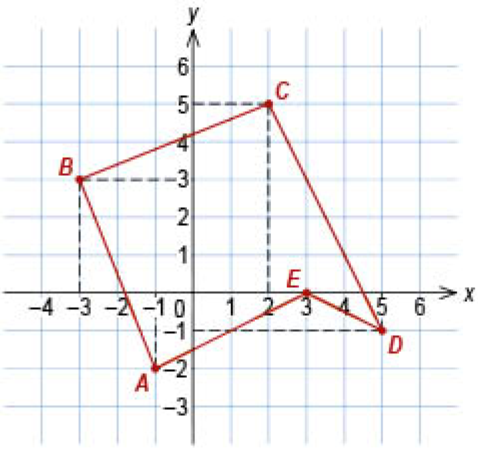
Площадь 3.

83.



Площадь 9.

84.



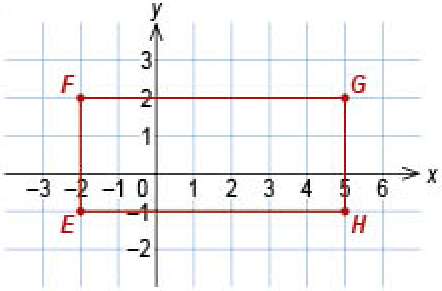
Площадь 18.

85. Площадь равна $3{,}5 \cdot 4 = 14$. **86.** Площадь равна $5 \cdot 15 = 75$.

1. a) НИКА (древнеримская богиня победы) b) МАЛИНА c) МИЛАН

2. a) (6; 1) (1; 2) (1; −2) (5; 3) b) (−2; −3) (−2; 1) (1; 2) (−3; −1) (1; 2) (−2; −3); (5; 3) c) (2; −3) (1; −2) (−2; 1) (1; 2) (6; 1) (−3; −1) (1; 2) (−2; −3) d) (1; −2) (2; −3) (−2; −3) (−3; 4) (5; 3) (−2; −3).

3.

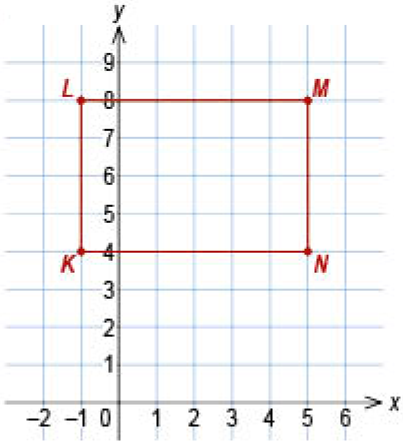


Площадь 21.

4. Площадь равна 7,5; катеты *EF* и *EG*; гипотенуза *FI*.

5. Площадь равна 14; катеты *FG* и *GJ*; гипотенуза *FJ*.

6.



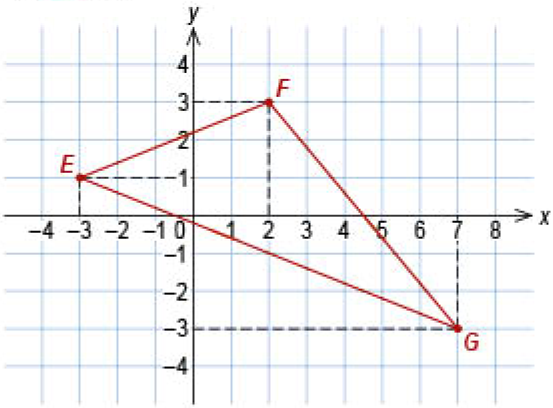
Площадь 24.

7. Площадь равна 9; катеты *LM* и *LP*; гипотенуза *MP*.

8. Площадь равна 16; катеты *MN* и *NR*; гипотенуза *MR*.

9. 24. **10.** 26.

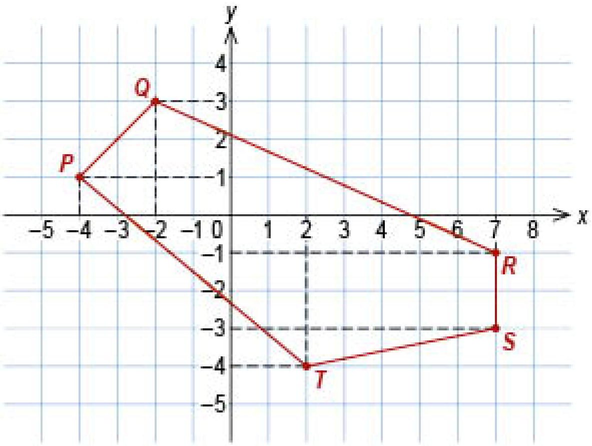
11.



Площадь 20.

12. 11. **13.** 6,5. **14.** 21. **15.** 23,5.

16.



Площадь 39,5.

§ 4. Прямо пропорциональная зависимость. Пропорции

88. a) 180 *км*; b) 108 *км*; c) 146,25 *км*. **89.** a) 840 *м*; b) 609 *м*; c) 1386 *м*. **90.** a) 6 *м*; b) 9,6 *м*; c) 3,06 *м*. **91.** a) 55,5 *км*; b) 41,625 *км*; c) 67,5 *км*. **93.** a) 25,5; b) 41,82. **94.** a) 53,3 *га*; b) 71,5 *га*. **95.** a) 58,4 *м*; b) 23,725 *м*. **96.** a) 114; b) 167,96. **98.** a) 2870; b) 5117,21. **99.** a) $85 \cdot 6 = 510$; b) $155,1 \cdot 6 = 930,6$. **100.** $A = at$ при неизменной производительности труда; $A = bP$ при фиксированном времени. **101.** $S = at$, при неизменной скорости; $S = bv$ при фиксированном времени. **102.** a) нет; b) да; c) да; d) нет. **103.** a) да; b) да; c) да; d) нет. **104.** Если левые части двух пропорций равны, то их правые части образуют пропорцию. **105.** a) −2,5; b) 35,5. **106.** a) −1,964; b) 0,55. **107.** Нет. Слева отрицательное число, справа положительное. **108.** a) 1,09375; b) −0,375; c) −3,65. **109.** a) 1,71875; b) 2,5; c) 2. **110.** 1064 *м*. **111.** 18,2. **112.** 456 *м*. **113.** 6,5 сорочек в час.

114. $V = 8 \cdot 5 \cdot 16 = 640$ *см*^{3}; $S = 2 \cdot 8 \cdot 5 + 2 \cdot 8 \cdot 16 + 2 \cdot 5 \cdot 16 = 496$ *см*^{2}

a) $V = 8 \cdot 5 \cdot 4 = 160$ *см*^{3}; $S = 2 \cdot 8 \cdot 5 + 2 \cdot 8 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \cdot 4 = 184$ *см*^{2}

b) $V = 8 \cdot 5 \cdot 40 = 1600$ *см*^{3}; $S = 2 \cdot 8 \cdot 5 + 2 \cdot 8 \cdot 40 + 2 \cdot 5 \cdot 40 = 1120$ *см*^{2}

c) $V = 8 \cdot 5 \cdot 80 = 3200$ *см*^{3}; $S = 2 \cdot 8 \cdot 5 + 2 \cdot 8 \cdot 80 + 2 \cdot 5 \cdot 80 = 2160$ *см*^{2}

Прямо пропорциональная зависимость между объёмом и высотой: $V = 8 \cdot 5 \cdot h$.

115. $L = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2,1 = 28,4$ *м*;

$s = 2 \cdot 4 \cdot 2,1 + 2 \cdot 1 \cdot 2,1 = (2 \cdot 4 + 2 \cdot 1)\,2,1 = 21$ *м*.

a) $L = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 0,7 = 22,8$ *м*;

$s = 2 \cdot 4 \cdot 0,7 + 2 \cdot 1 \cdot 0,7 = (2 \cdot 4 + 2 \cdot 1)\,0,7 = 7$ *м*.

b) $L = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 4,2 = 36,8$ *м*;

$s = 2 \cdot 4 \cdot 4,2 + 2 \cdot 1 \cdot 4,2 = (2 \cdot 4 + 2 \cdot 1)\,4,2 = 42$ *м*.

c) $L = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 14,7 = 78,8$ *м*;

$s = 2 \cdot 4 \cdot 14,7 + 2 \cdot 1 \cdot 14,7 = (2 \cdot 4 + 2 \cdot 1)\,14,7 = 147$ *м*.

Прямо пропорциональная зависимость между площадью боковой поверхности и высотой: $s = (2 \cdot 4 + 2 \cdot 1)\, h$.

117. 4. **118.** 72 литра в минуту. **119.** Высота Беты меньше. **120.** 10 рейсов. **121.** 7. **122.** Цена лука больше. **123.** 1) 39,6 сом. 2) 2,875 часа. 3) 50 мальчиков. 4) 45 дворов. **124.** 1) 59 сомов. 2) 1,69 часа. 3) 40 девочек. 4) На 70 огородах.

1. a) 24; b) 80; c) 116. **2.** a) 432; b) 396. **3.** a) 4130; b) 7210; c) 3521. **4.** a) 37 200 сомов; b) 31 500 сомов. **5.** a) да b) да c) да d) нет **6.** a) −3; b) 0,5; c) −0,12; d) −3. **7.** 21,25. **8.** a) 18,8; b) 65,8. **9.** a) 211,2; b) 98,56; c) 161,92.

10. $V = 4{,}2 \cdot 4{,}2 \cdot 4{,}2 = 74{,}088\, м^3$; $S = 6 \cdot 4{,}2 \cdot 4{,}2 = 105{,}84\, м^2$;
$L = 12 \cdot 4{,}2 = 50{,}4\, м$.
a) $V = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}343\, м^3$; $S = 6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 2{,}94\, м^2$;
$L = 12 \cdot 0{,}7 = 8{,}4\, м$.
b) $V = 10{,}5 \cdot 10{,}5 \cdot 10{,}5 = 1157{,}625\, м^3$; $S = 6 \cdot 10{,}5 \cdot 10{,}5 = 661{,}5\, м^2$;
$L = 12 \cdot 10{,}5 = 126\, м$.
c) $V = 16{,}8 \cdot 16{,}8 \cdot 16{,}8 = 4741{,}632\, м^3$; $S = 6 \cdot 16{,}8 \cdot 16{,}8 = 1693{,}44\, м^2$;
$L = 12 \cdot 16{,}8 = 201{,}6\, м$.
Прямо пропорциональная зависимость между длиной каркаса и ребром: $L = 12 \cdot a$.

11. 22,75. **12.** 4,92. **13.** 60. **14.** 12. **15.** a) 4; b) 5; c) 8; d) 6,25. Обратно пропорциональная зависимость. **16.** a) 2; b) 48; c) 34; d) 46. Прямо пропорциональная зависимость. **17.** a) 16; b) 5; c) 6,4; d) 25. Обратно пропорциональная зависимость.

§ 5. Смеси

126. Сайкал ошиблась. Количество овец – целое число. **127.** 16 гусей. **128.** 70 сомов. **129.** 33 сома. **130.** a) 8,72; b) невозможно. **131.** a) 10,96; b) 12,06. **132.** 14 *кг*. **133.** 7 *кг*. **134.** 11. **135.** 17. **136.** 12,5 литра. **137.** 4,6 литра. **138.** 27 литров. **139.** 20 литров. **140.** 5. **141.** 150 литров. **142.** 100 граммов. **143.** 3 литра. **144.** a) Четыре монеты 50 тыйынов; b) Одна монета 5 сомов и две монеты 50 тыйынов, или две монеты 3 сома, или одна монета 3 сома и шесть монет 50 тыйынов, или двенадцать монет 50 тыйынов.
145. a) Четыре монеты 1 сом или одна монета 3 сома и одна монета 1 сом; b) Одна монета 5 сомов, или две монеты 1 сом и одна монета 3 сома, или пять монет 1 сом. **146.** 1) Например, (15; 2), (12; 4), (9; 6). 2) a) 6 пар; b) невозможно; c) невозможно. **147.** 1) Например, (2,52; 1), (1,16; 3), (0,48; 4). 2) a) 1,84 *кг*; b) невозможно.

1. 15. **2.** Эрнист ошибся. Количество овец не может быть нецелым числом. **3.** 7. **4.** Эльчибай ошибся. Количество автомобилей не может быть отрицательным числом. **5.** 3. **6.** Видимо произошла ошибка при подсчете стоимости покупки. Число *B* должно быть целым. **7.** Получить 34% раствор таким образом невозможно. **8.** 5. **9.** 30 дней. **10.** a) 720 сомов; b) 935 сомов. **11.** a) Три монеты достоинством в 3 сома; b) Три монеты достоинством в 5 сомов, или пять монет достоинством в 3 сома. **12.** 15 литров. **13.** 4. **14.** 7. **15.** 21. **16.** 16. **17.** 3 литра. **18.** 1) Например, (1; 6,875), (2,4; 6), (4; 5). 2) a) 6,25 *кг*; b) 4,25 *кг*.

§ 6. Простейшие системы линейных уравнений

149. 45,5; 62,5. **150.** 445; 375. **151.** 5,5 : 3,5. **152.** 15 : 8. **153.** 11 и 8. **154.** 160 и 20. **155.** 4. **156.** 2. **157.** 27 и 6. **158.** 9 и 6. **159.** 8. **160.** 73/9 – неправильный ответ. **161.** 7,2 – неправильный ответ. **162.** 17. **163.** 344. **164.** 231. **166.** 9 *см*². **167.** 20 *см*; 16 *см*. **168.** 35 *м*². **169.** 7 *см*. **170.** 7200 сомов. **171.** 44,1 *кг*. **172.** 425 овец и 75 коз. **173.** 35 коров и 15 лошадей. **174.** 37 и 23. **175.** 40 и 24. **176.** (60; 40). **177.** (40; 10).

1. 9,2; 7,8. **2.** a) (21; 21); b) (2; −45); c) (1; 7); d) (9; 176); e) (0,4; 1,6); f) (0,7; −2,2). **3.** 12. **4.** Решение системы 12,5 и 20,5 не является правильным ответом к задаче потому что число гусей и овец не может быть нецелым. **5.** Правильный ответ: ни одного, потому что для сборки велосипеда нужно еще много других деталей. Если же предполагать, что все остальные детали имеются, то по 4. **6.** 151. **7.** 16. **8.** 12. **9.** 6. **10.** 8740 *см*². **11.** Шляпа: 250 сомов; кепка: 150 сомов. **12.** (30; 10). **13.** На север: 320 *км/час*; на юг: 280 *км/час*. **14.** 820 *км/час*; 680 *км/час*. **15.** 85 и 115. **16.** 15 и 10. **17.** Решение системы −8 и 40 не является правильным ответом к задаче, потому что число мальчиков не может быть отрицательным. **18.** Решение системы 35 и −2 не является правильным ответом к задаче, потому что число гусей не может быть отрицательным числом. **19.** 35 л и 15 л.

§ 7. Свойства позиционной системы записи натуральных чисел

179. 13; 22; 31; 40. **180.** 89; 98. **181.** 47. **182.** 61. **183.** 229. **184.** 434. **185.** 71. **186.** 46. **187.** 474. **188.** 255. **189.** 53. **190.** 28. **191.** 35. **192.** 49. **193.** 90. **194.** 929. **195.** 326. **196.** 45. **197.** 918. **198.** 344.

1. 1000. **2.** 999. **3.** a) 12; 21; 30. b) 79; 88; 97. **4.** a) 101; 110. b) 899; 989; 998. **5.** 96. **6.** 114. **7.** 323. **8.** 92. **9.** 373. **10.** 21. **11.** 34. **12.** 56. **13.** 49. **14.** 86. **15.** 260. **16.** 24. **17.** 342. **18.** 630. **19.** 540.

§ 8. Делимость чисел

200. a) Да. b) Да. c) Нет. d) Да. e) Нет. f) Нет. **201.** a) Да. b) Нет. c) Нет. d) Да. e) Нет. f) Нет.

202. a) $749 = 700 + 49 = 7 \cdot 100 + 49$
b) $369 = 360 + 9 = 36 \cdot 10 + 9$
c) $121 = 110 + 11 = 11 \cdot 10 + 11$
d) $1339 = 1300 + 39 = 13 \cdot 100 + 39$
e) $363 = 330 + 33 = 33 \cdot 10 + 33$
f) $360024 = 360000 + 24 = 36 \cdot 10000 + 24$

203. a) $618 = 600 + 18 = 6 \cdot 100 + 18$
b) $3606 = 3600 + 6 = 36 \cdot 100 + 6$
c) $2121 = 2100 + 21 = 21 \cdot 100 + 21$
d) $1734 = 1700 + 34 = 17 \cdot 100 + 34$
e) $9632 = 9600 + 32 = 96 \cdot 100 + 32$
f) $193857 = 190000 + 3800 + 57 = 19 \cdot 10000 + 38 \cdot 100 + 57$

205. $\{6; 14; -4; 168; 40\}$

206. a) $14 = 2 \cdot 7$ d) $334 = 2 \cdot 167$
b) $38 = 2 \cdot 19$ e) $3638 = 2 \cdot 1819$
c) $26 = 2 \cdot 13$ f) $3610024 = 2 \cdot 1805012$.

207. $\{31; -47; 689; 407; -307\}$

208. a) $46 = 2 \cdot 23$ d) $2334 = 2 \cdot 1167$
b) $58 = 2 \cdot 29$ e) $8638 = 2 \cdot 4319$
c) $662 = 2 \cdot 331$ f) $61200242 = 2 \cdot 30600121$.

210. a) Да. b) Нет. c) Да. d) Нет. e) Нет. f) Нет. **211.** a) Да. b) Нет. c) Да. d) Нет. e) Да. f) Да. **212.** a) Быстрик; Шустрику и Быстрику досталось по 414 морковок каждому. b) Шустрик; Шустрику досталось 322 морковки, Быстрику – 299. c) Шустрик; Шустрику досталось 333 морковки, Быстрику – 322. d) Быстрик; Шустрику досталось 207 морковок, Быстрику – 193. **213.** a) Бырша; Шурше и Бырше досталось по 128 бусинок каждой. b) Шурша; Шурше досталось 96 бусинок, Бырше – 80. c) Шурша; Шурше досталось 123 бусинок, Бырше – 112. d) Бырша; Шурше досталось 160 бусинок, Бырше – 150.

214. a) Нет. b) Да. c) Да. d) Да. e) Нет.

215. a) $140 = 5 \cdot 28$ c) $265 = 5 \cdot 53$ e) $6385 = 5 \cdot 1277$
b) $385 = 5 \cdot 77$ d) $3340 = 5 \cdot 668$ f) $100245 = 5 \cdot 20049$.

216. a) Нет. b) Да. c) Да. d) Нет. e) Да.
217. a) $460 = 5 \cdot 92$ c) $6625 = 5 \cdot 1325$ e) $8635 = 5 \cdot 1727$
b) $585 = 5 \cdot 117$ d) $2330 = 5 \cdot 466$ f) $12005 = 5 \cdot 2401$

218. a) Нет. b) Нет. c) Да. d) Да. **219.** a) Нет. b) Да. c) Нет. d) Да. **220.** 2; 4; 6; 8. **221.** 2; 7. **222.** a) Нет. b) Да. c) Нет. d) Да. **223.** a) Да. b) Да. c) Нет. d) Нет. **224.** 2; 6. **225.** 5. **226.** a) Нет. b) Да. c) Да. d) Нет. **227.** a) Нет. b) Да. c) Да. d) Нет. **228.** a) Нет. b) Да. c) Да. d) Да. **229.** a) Да. b) Нет. c) Нет. d) Да. **230.** 1; 4; 7. **231.** 2; 5; 8. **232.** 2; 5; 8. **233.** 1. **234.** Нет. Например, 67 + 5 делится на 9. **235.** 1; 4; 7. Сумма цифр $6 + 3 + (a + 2)$. **236.** 9. Сумма цифр $b + 3 + 6 + 9$. **237.** 2; 5; 8. Сумма цифр $4 + 3 + c + 6$. **238.** a) 25 305 432. b) 25 305 435. **239.** a) 234 045 675. b) 234 045 675. **240.** a) 239 439. b) 237 435. c) Такого числа нет. **241.** a) 234 945 675. b) 234 845 676. c) 234 845 676.

1. 88. **2.** 89. **3.** 11. **4.** 21.
5. a) $217 = 210 + 7 = 21 \cdot 10 + 7$
b) $1616 = 1600 + 16 = 16 \cdot 100 + 16$
c) $62031 = 62000 + 31 = 62 \cdot 1000 + 31$
d) $54270 = 54000 + 270 = 54 \cdot 1000 + 270$
e) $860043 = 860000 + 43 = 86 \cdot 10000 + 43$
f) $182091 = 182000 + 91 = 182 \cdot 1000 + 91$
6. a) Чётное. b) Нечётное. c) Нечётное. d) Чётное. e) Нечётное. f) Нечётное.
7. a) Пёстрик; Пёстрику достался 171 початок, Чернышу – 152. b) Пёстрик; Пёстрику досталось 317 початков, Чернышу – 304. c) Черныш; Пёстрику досталось 228 початков, Чернышу – 227. d) Черныш; Пёстрику досталось 209 початков, Чернушке – 191. **8.** a) Да. b) Нет. c) Нет. d) Да. **9.** a) Да. b) Нет. c) Да. d) Нет. **10.** 0; 3; 6; 9. **11.** 4. **12.** Нет таких значений. **13.** Нет таких значений. **14.** 5. **15.** 5. **16.** 0; 6. **17.** 6. **18.** 0; 3; 6; 9. **19.** 1. **20.** Нет таких значений. **21.** a) 30540; b) 30540; c) 32544. **22.** a) 249453; b) 248454; c) 249450. **23.** 423965. **24.** Число делится на 25, если на 25 делится число, составленное из двух последних цифр в записи числа. Так как 85 не делится на 25, Остап Бендер прав: чек не подтверждает покупку стульев по цене 25 рублей. **25.** Номера страниц на каждом листе есть два последовательных натуральных числа: нечетное и четное. Поэтому сумма номеров страниц на каждом листе является нечетным числом. Так как сумма нечетного числа нечетных чисел является нечетным числом, сумма 2014 не может быть правильной.

§ 9. Разложение натуральных чисел на множители. НОК

243. a) нет; b) да; c) да; d) да; e) да; f) нет. **244.** a) да; b) да; c) нет; d) нет; e) да; f) да. **245.** 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37. **246.** 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

247. a) $35 = 5 \cdot 7$
b) $14 = 2 \cdot 7$
c) $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$
d) $242 = 2 \cdot 11 \cdot 11$
e) $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
f) $9000 = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$

248. a) $17 = 17$
b) $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
c) $98 = 2 \cdot 47$
d) $250 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
e) $111 = 3 \cdot 37$
f) $10\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$

249. 24 *мин.* **250.** 2 часа. **251.** a) 77; b) 35; c) 84; d) 150; e) 7560; f) 6006. **252.** a) 65; b) 70; c) 245; d) 120; e) 231 000; f) 4914. **253.** 11,2. **254.** 14,4. **255.** 1,5 часа (Указание: переведите всё в минуты). **256.** 114 минут. **257.** 24 часа. **258.** 15 часов. **259.** 5,85 минуты. **260.** 2,625 дней. **261.** 16,32 минуты. **262.** 14,85 минуты. **263.** 27,5 минуты. **264.** 60 минут. **265.** 22 375 *км.* **266.** 187,5 *км.*

1. a) $23 = 23$ b) $26 = 13 \cdot 2$ c) $88 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11$ d) $96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ e) $126 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7$ f) $2100 = 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$

2. 2,4. **3.** 0,5. **4.** a) 51; b) 34; c) 204; d) 140; e) 33 000; f) 1056. **5.** 17,28. **6.** 11,25. **7.** 10 дней. **8.** 84. **9.** 78,75. **10.** 8 часов. **11.** 63 часа. **12.** 4,48 часа. **13.** 3,6 минуты. **14.** 26,4 минуты. **15.** 30 минут. **16.** 4331,25 *км.* **17.** Нет. Бассейн будет наполнен за 40 минут. **18.** 7.

§ 10. Равенство обыкновенных дробей. НОД

268. a) 9; b) 216; c) −52; d) 1,69; e) 6; 2f) −33,75. **269.** a) 16; b) 10; c) 198; d) 0,031; e) 18,7; f) −300. **270.** a) нет; b) нет; c) да; d) нет; e) да; f) нет. **271.** a) да; b) да; c) нет; d) нет; e) нет; f) да. **272.** a) {2; 5}; b) {2; 3; 31}; c) {5; 51; 2; 21}; d) {2; 21; 22; 23; 3}. **273.** a) {5; 7}; b) {17}; c) {11; 3; 31}; d) {5; 51; 52; 2; 21}. **274.** a) 154; b) 36; c) 168; d) 480. **275.** a) 156; b) 748; c) 1001; d) 4900. **276.** a) 2; b) 1; c) 16; d) 81; e) 13. **277.** a) 1; b) 9; c) 28; d) 4;

e) 3. **278.** a) 4 и 14; b) 22 и 8. **279.** a) 21 и 35; b) 24 и 14. **280.** 10, 14 и 18. **281.** 8, 10 и 12.

282. a) $\frac{9}{7}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $-\frac{17}{54}$; d) $\frac{4}{7}$. **283.** a) $\frac{4}{5}$; b) $\frac{3}{2}$; c) $-\frac{3}{8}$; d) $\frac{3}{5}$.

1. a) 10; b) 13; c) −48; d) 400. **2.** a) да; b) нет; c) нет; d) нет. **3.** a) {3; 7}; b) {3; 31; 5}; c) {2; 21; 22; 23; 5}; d) {3; 31; 13}. **4.** a) 572 и 2; b) 150 и 25; c) 400 и 1; d) 432 и 2. **5.** a) Нет. НОК (14; 49) = 98; НОД (98; 147) = 49. b) Да. НОК (4; 16) = НОД (48; 32) = 16. **6.** a) 10 и 18; b) 14 и 10. **7.** 8; 14 и 18. **8.** Нет. Например, НОД (6; 8) = 2. **9.** a) 1; b) 1 (см. на пункт a). **10.** Правильный ответ *b*. Утверждение A не верно. Например, НОД (7; 14) = 7.

11. a) $\frac{2}{15}$; b) $\frac{13}{21}$; c) $-\frac{3}{41}$; d) $\frac{8}{15}$.

§ 11. Действия над обыкновенными дробями

285. a) правильная; b) правильная; c) неправильная; d) правильная; e) неправильная; f) неправильная. **286.** a) неправильная; b) правильная; c) неправильная; d) правильная; e) неправильная; f) неправильная.

287. a) $\frac{51}{140}$; b) $-\frac{11}{32}$; c) $-\frac{1}{8}$; d) $\frac{9}{14}$; e) $\frac{6}{5}=1{,}2$; f) $\frac{17}{3}$.

288. a) $\frac{9}{91}$; b) $-\frac{1}{20}=-0{,}05$; c) $-\frac{1}{9}$; d) $\frac{7}{60}$; e) $\frac{6}{7}$; f) 8.

289. a) $\frac{35}{39}$; b) $-\frac{9}{22}$; c) $-\frac{98}{57}$; d) $\frac{25}{2}=12{,}5$.

290. a) $\frac{28}{27}$; b) $-\frac{21}{32}$; c) −1; d) $\frac{2}{63}$. **291.** a) $\frac{17}{82}$; b) $\frac{10}{63}$.

292. a) $\frac{27}{40}$; b) $\frac{23}{30}$. **293.** a) $\frac{7}{82}$; b) $-\frac{10}{63}$; c) $-\frac{37}{65}$.

294. a) $\frac{51}{241}$; b) $\frac{1}{84}$; c) $-\frac{27}{62}$. **295.** a) 1; b) $\frac{3}{7}$; c) $-\frac{2}{23}$; d) $-\frac{20}{21}$; e) $\frac{1}{3}$; f) $\frac{1}{3}$.

296. a) $-\frac{2}{5}$; b) 2; c) $-\frac{15}{19}$; d) $\frac{4}{27}$; e) $\frac{9}{13}$; f) $\frac{18}{19}$.

297. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{8}$; c) $-\frac{25}{42}$; d) $-\frac{4}{21}$; e) $\frac{53}{48}$; f) $\frac{2}{15}$.

298. a) $-\frac{2}{15}$; b) $\frac{64}{77}$; c) $-\frac{121}{160}$; d) $\frac{17}{84}$; e) $\frac{71}{117}$; f) $\frac{77}{90}$.

299. a) $-\frac{2}{15}$; b) $\frac{64}{77}$. **300.** a) $3\frac{1}{8}$; b) $-7\frac{3}{4}$. **301.** a) $2\frac{1}{17}$; b) $-60\frac{1}{7}$.

302. a) $\frac{817}{81}$; b) $-\frac{99}{42}$.

304. a) $30\frac{57}{64}$; b) $51\frac{2}{15}$; c) $22\frac{4}{15}$; d) $101\frac{2}{17}$; e) $93\frac{3}{16}$; f) $3\frac{1}{57}$.

305. a) $55\frac{3}{4}$; b) $888\frac{1}{24}$; c) $111\frac{19}{84}$; d) $31\frac{13}{64}$; e) $50\frac{1}{31}$; f) $4\frac{2}{39}$.

306. a) 3,7; b) 0,235. **307.** a) 13,9; b) 6. **308.** a) 1,3; b) 2. **309.** a) 4,2; b) 15. **310.** 20. **311.** 3,5.

1. a) смешанная; b) неправильная; c) правильная; d) неправильная; e) смешанная; f) правильная

2. a) $2\frac{17}{82}$; b) $-\frac{13}{17}$; c) $\frac{13}{48}$; d) $-\frac{5}{27}$; e) $-\frac{17}{482}$; f) $\frac{34}{173}$; g) $\frac{83}{21}$; h) $-5{,}2$.

3. a) $-3\frac{2}{11}$; b) $71\frac{1}{6}$. **4.** a) $\frac{36007}{18}$; b) $-\frac{789}{7}$. **5.** a) $\frac{164}{17}=9\frac{11}{17}$; b) $\frac{4}{7}$; c) $\frac{19}{2}=9{,}5$; d) $\frac{1}{16}$; e) $4\frac{1}{8}$; f) $2\frac{26}{87}$; g) $1\frac{2}{21}$; h) $-1\frac{9}{14}$.

6. a) 5; b) 2; c) 4,2; d) 1,2. **7.** a) 2,1; b) 1.

§ 12. Степени. Абсолютная и относительная погрешность

313. 1) a) 41^5; b) $3{,}21^7$; c) $9^2 \cdot 7^3 \cdot 3^4$; d) $(\frac{5}{11})^5$.

2) a) 1331; b) 4,41; c) 0,0081; d) $\frac{27}{2197}$; e) $1975\frac{25}{81}$.

314. 1) a) 114^6; b) $0{,}003^4$; c) $7^3 \cdot 7^2 \cdot 3^4$; d) $(1\frac{9}{71})^4$.

2) a) 128; b) 8242,408; c) 0,0144; d) $\frac{1}{243}$; e) $204\frac{4}{49}$.

315. Сумма степеней слева равна сумме степеней справа. **316.** a) 6; b) 1. **317.** a) 10; b) 1. **318.** 16. **319.** 5,5. **320.** 2,505; 0,05%; **321.** 0,422; 0,3%.

1. a) 17^5; b) $3{,}1^6$; c) $9^3 \cdot 5^3 \cdot 13^3$; d) $(5\frac{5}{17})^3$. **2.** a) 9261; b) 0,0001; c) 27,154521; d) $\frac{169}{529}$; e) $186\frac{202}{343}$. **3.** 1,1. **4.** 0,493; 0,58%. **5.** 11.

§ 13. Задачи на составление уравнений

322. a) да; b) нет; c) да; d) нет. **323.** a) нет; b) да; c) да; d) да

324. a) 28; b) $-\frac{1}{7}$; c) $3\frac{3}{7}$; d) $3\frac{4}{7}$; e) $2\frac{35}{57}$.

325. a) 476; b) $\frac{11}{42}$; c) $7\frac{1}{7}$; d) $3\frac{2}{3}$; e) $\frac{164}{17} = 9\frac{11}{17}$.

326. 12. **327.** 35. **328.** 280. **329.** 1260. **330.** 33. **331.** 14. **333.** 15. **334.** 33. **335.** 60. **336.** 35. **338.** 4. **339.** 2. **340.** Сурия проверила 200, Зарина 180, Эльмира 162. **341.** 34,5. **342.** Задача решения не имеет, так как число банок не может быть дробным. **343.** Задача решения не имеет, так как число цветков не может быть дробным.

344. $\frac{12}{36}$. **345.** $\frac{4}{20}$.

346. 273 и 215. **347.** 63 и 84. **348.** 600. **349.** 1162.

350. $2\frac{11}{18}$; $7\frac{7}{18}$. **351.** $9\frac{33}{35}$; $4\frac{7}{18}$; $7\frac{29}{18}$. **352.** $\frac{16}{1225}$. **353.** $\frac{23}{12}$.

1. a) 1/3; b) $4\frac{1}{3}$; c) $2\frac{3}{3}$; d) $2\frac{4}{7}$; e) $1\frac{7}{11}$; f) $\frac{1}{7}$; g) $\frac{50}{57}$; h) 11; i) $\frac{23}{36}$; j) $1\frac{25}{64}$; k) $5\frac{4}{91}$. **2.** 3404; 2516. **3.** 8000. **4.** $24\frac{1}{3}$. **5.** 42. **6.** 21 и 45. **7.** 524 сома. **8.** 408. **9.** 123 080. **10.** 16. **11.** 5/12. **12.** 648. **13.** 174. **14.** $5\frac{5}{16}$; $7\frac{3}{16}$. **15.** 11,7; 9,1; 12,2 **16.** $2\frac{43}{450}$ *м*².

§ 14. Средние значения: среднее арифметическое. Мода. Медиана

355. 4,9 *кг*. **356.** 3,825 *кг*. **357.** 453 сома. **358.** 61,622 *кг*.

359. a) 115; b) 813050; c) $\frac{11}{28}$; d) 2; e) 14; f) $6\frac{8}{315}$.

360. a) 14; b) 79811,04; c) 3,5; d) −1; e) −6,14; f) $4\frac{1}{48}$.

361. a) 192; b) −244,42; c) 125; d) $36\frac{3}{7}$.

362. a) 187; b) −71,01; c) 30; d) $77\frac{7}{9}$.

363. 13,6 *кг*. Речь идет о весе тыкв, а он может быть нецелым. **364.** Ответ 262,5 неверен, так как число яиц не может быть дробным. **365.** 3,75 *кг*. Речь идет о весе макарон, а он может быть нецелым. **366.** Ответ 133,6, но число яиц не может быть дробным. **368.** 11 лет. **369.** 6 кукол. **370.** 20 задач. **371.** 1 раз. **372.** 3,73 *кг*. **373.** 4,06 *кг* и 4,5 *кг*. **374.** 47; 46,6. **375.** 4,5375. **376.** 109,2/27 = 4,044. **377.** 290/73 ≈ 3,9726. **378.** Для магазина «Альфа» 53,38, для «Бета» 54. Решение может быть принято как в пользу одного, так и другого. Например, доводы в поддержку продажи «Бета»: среднее арифметическое для неё больше, но это достигнуто только благодаря результатам одной недели, когда прибыль составила 70 тысяч. По другим неделям показатели «Альфы» лучше. **379.** Для традиционного 30,4, для нового 30. Решение может быть принято как в пользу одного, так и другого. Например, доводы в поддержку нового сорта: среднее арифметическое для него меньше, но это из-за одного поля, где урожайность составила 13. Можно предположить, что за ним плохо ухаживали. **380.** Для магазина «Альфа»: Me = 53,5; Mo = 53; 54; 55, для «Бета»: Me = 53; Mo = 50. **381.** Для традиционного: Me = 30; Mo = 29, для нового: Me = 32; Mo = 32. **382.** a) 23; b) 1/2; c) −5,43. **383.** a) 17; b) 21; c) −3,13. **384.** a) 2/11; b) −16/105; c) −0,675. **385.** a) 4,2; b) 3,5; c) 6,5. **386.** a) 2/11; b) −16/105; c) −0,675. **387.** a) 4,2; b) 3,5; c) 6,5. **388.** a) Одна, две, три и шесть мод возможны. Соответствующие примеры: {1; 1; 4; 4; 1; −6}, {1; 1; 4; 4; 1; 4}, {1; 1; 4; −1; 4; −1}. Четыре и пять мод невозможны. b) Неверно. Медиана может быть больше, меньше или равна среднему арифметическому. Соответствующие примеры: {1; 4; 5}, {1; 2; 4}, {1; 3; 5}. **389.** a) Одна, две или четыре моды возможны. Соответствующие примеры: {1; 1; 4; 1}, {1; 1; 4; 4}, {1; 4; −1; −6}. Три моды невозможны. b) Неверно. Мода может быть больше, меньше или равна среднему арифметическому. Соответствующие примеры: {1; 4; 4; 5}, {1; 2; 2; 4}, {1; 3; 3; 5}.

1. 2,6. **2.** 300,5. **3.** a) 227,2; b) 9813052,5; c) 7/8; d) −3; e) −10; f) $1\frac{61}{180}$. **4.** 3258. **5.** Разделив 320 на 25 получим, что Киса купил 12,8 стульев. **6.** 2,22 т. **7.** 145,2 *кг*; 133,2 *кг*. **8.** 170 *см*. **9.** 170 *см*. **10.** 5218/14 ≈ 327,7; 381,5. **11.** 1271/17 ≈ 74,7647. **12.** μ = 21,6; Me = 21; Mo = 21. **13.** a) μ = 10; Me = 9,5; Mo = 9,12. *b*) μ = 7,38; Me = 7; Mo = 7. *c*) μ = 2,63; Me = 2,3; Mo = 2. **14.** *a*) μ = 14,67; Me = 14,5; Mo = 14; 13; 15; 16. *b*) μ = 13,33; Me = 13,1; Mo = 11,7;13,6. *c*) μ = 1,23; Me = 1,35; Mo = 1,4. **15.** Когда ввели премию, работники стали увеличивать выручку, не принимая во внимание расходы. В результате среднее значение прибыли уменьшилось. **16.** Мээрим пропустила два урока. **17.** 68 ≤ Me ≤ 75. **18.** Mo = 6; Айхан выпивает 6 чашек чая. **19.** Нет. Модой может быть любое из перечисленных чисел. В случае одной моды ответ Mo = 6. **20.** 509.

§ 15. Организация данных

393. a)

Размер обуви	15	16	17	18	19	20	21	22
Частота	2	3	2	3	1	2	1	2

b) 11; c) 6.

394.

Результат теста	Синий	Красный	Зелёный	Жёлтый
Частота	4	4	3	3

395.

Группа (или рост)	Частота
100–109	3
110–119	3
120–129	4
130–139	3
140–149	3
150–159	1
160–169	1

396.

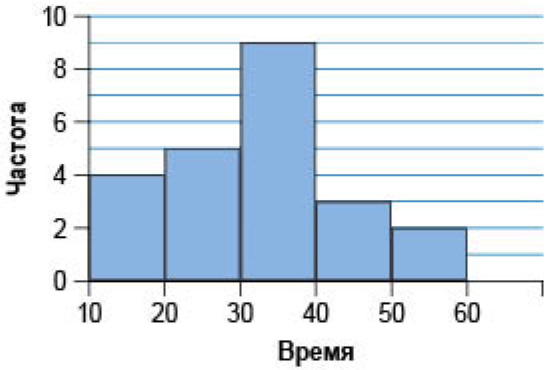
Группа (или время)	Частота
0–9	3
10–19	5
20–29	3
30–39	1
40–49	2
50–59	1
60–69	1

397. a)

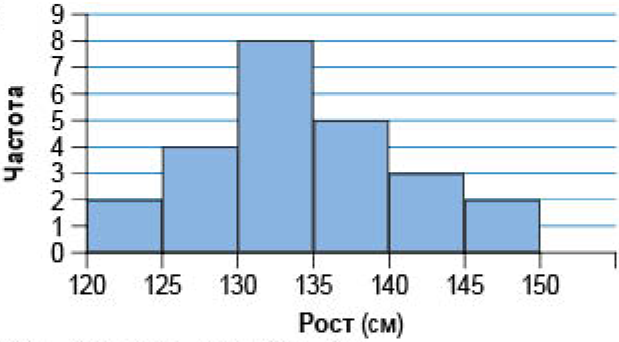
Количество конфет	22	23	24	25
Частота	4	5	7	4

b)

398.



400. a)

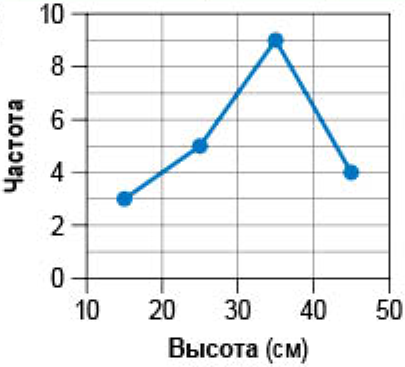


b) 130–134; 130–134; 145–149.

401. a)

Высота (см)	Частота	Серединная точка
$10 \leqslant B < 20$	3	15
$20 \leqslant B < 30$	5	25
$30 \leqslant B < 40$	9	35
$40 \leqslant B < 50$	4	45

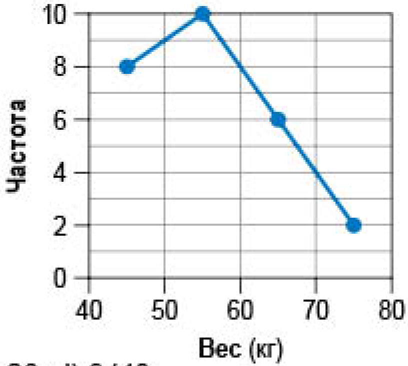
b)



402. a)

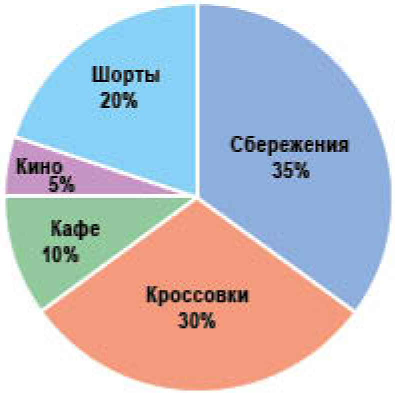
Вес (кг)	Частота	Серединная точка
$40 \leqslant B < 50$	8	45
$50 \leqslant B < 60$	10	55
$60 \leqslant B < 70$	6	65
$70 \leqslant B < 80$	2	75

b)

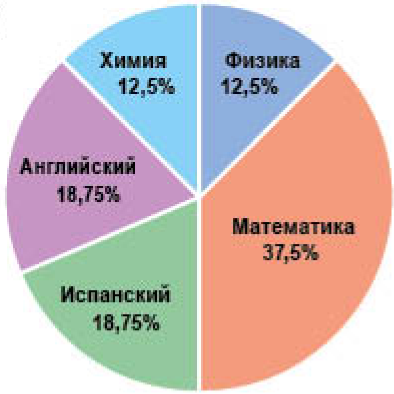


c) 26; d) 9 / 13.

403.



404. a)



b) 38%.

1.

Результат теста	1	2	3	4	5	6
Частота	3	3	4	5	1	4

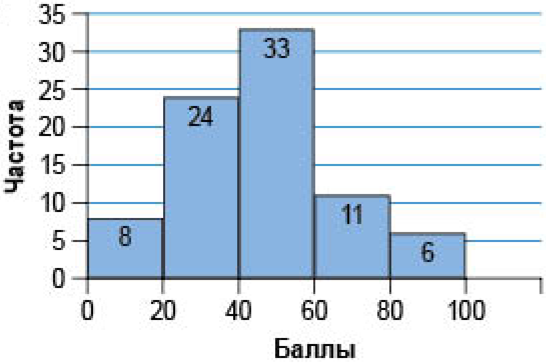
2.

Группа	20–29	30–39	40–49	50–59	60–69
Частота	2	4	6	4	2

3. a)

Баллы	0–19	20–39	40–59	60–79	80–99
Частота	8	24	33	11	6

b)



4. a) 7 учеников;

b)

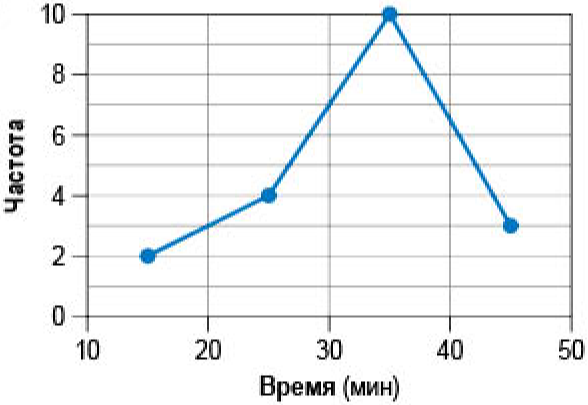
Вес	30–39	40–49	50–59	60–69	70–79
Частота	5	6	12	7	3

c) 29,5; d) 79,4.

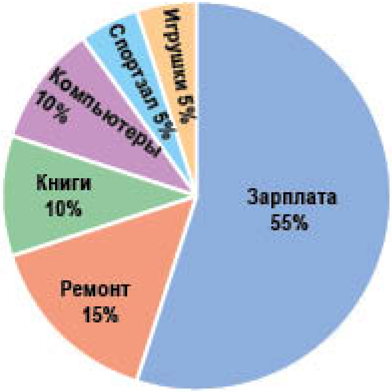
5. a)

Время (мин)	Частота	Серединная точка
10–19	2	14,5
20–29	4	24,5
30–39	10	34,5
40–49	3	44,5

b)



6. a)



b) 4 000 000 сомов.

7. a) 2 000 000 сомов. b) Игрушки = 180 000, компьютеры = 360 000 сомов, зарплата = 640 000 сомов, книги = 520 000 сомов.
8. a) 12,5%; b) x = 33,33%, y = 17%.

§ 16. Окружность. Круг. Сектор

406. $3{,}5\pi \approx 11$ *см*. **407.** $13{,}816/2\pi \approx 2{,}2$ *см*. **408.** $4{,}25^2\pi \approx 56{,}72$ *м*^{2}. **409.** $6{,}1\pi \approx 19{,}154$ *см*. **410.** $15{,}7/2\pi \approx 2{,}5$ *см*. **411.** $16\pi \approx 50{,}24$ *м*^{2}. **412.** 80 *см*. **413.** Площадь разреза $152\pi \approx 706{,}5$ *см*^{2}. Поэтому площадь плёнки должна быть больше или равна этому числу. **414.** $(5/9)\pi \approx 1{,}74$ *см*. **415.** $(5/24)8^2\pi \approx 41{,}87$ *м*^{2}. **416.** $(1/24)16\pi \approx 2{,}1$ *мм*. **417.** $(9/40)10^2\pi \approx 70{,}65$ *м*^{2}.

1. $9{,}1\pi \approx 28{,}57$ *см*. **2.** $14{,}13/2\pi \approx 2{,}25$ *см*. **3.** $49\pi \approx 153{,}86$ *м*^{2}. **4.** 471 м. **5.** 3,14 *см*. **6.** $(5/36)12^2\pi \approx 62{,}8$ *м*^{2}.

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

А1. Волшебная таблица

418. 29.09, то есть 29 сентября.

419. 8,84 + 18,3 + 35,23 + (−31,29) = 31,08;
0,93 + 26,21 + 9,05 + (−5,11) = 31,08;
4,85 + 18,3 + 39,22 + (−31,29) = 31,08.

420. 9.06, то есть 9 июня.

421. 1,06 + 7,73 + 22,29 = 31,08;
14,06 + 13,22 + 3,8 = 31,08;
19,55 + 16,8 + (−5,27) = 31,08.

423. 1)

15	20	30
9	14	24
6	11	21

2)

5	7	12
3	5	10
10	12	17

1) 15 + 14 + 21 = 50; 20 + 24 + 6 = 50; 30 + 9 + 11 = 50
2) 5 + 5 + 17 = 27; 7 + 10 + 10 = 27; 12 + 3 + 12 = 27

424. 1) Разность между соседними строками 6 и 3; между соседними столбцами 5 и 10. 2) Разность между соседними строками 2 и (−7); между соседними столбцами 2 и 5.

425. 1)

8	13	5
11	16	8
12	17	9

2)

7	9	12
5	7	10
10	12	15

3)

18	23	25
1	6	8
21	26	28

4)

−5	−14	−11
4	−5	−2
11	2	5

426. Таких таблиц много. Один из возможных вариантов:

1) a)

	10	20	30
40	50	60	70
50	60	70	80
−73	−63	−53	−43

b)

	2	1	8
60	62	61	68
20	22	21	28
10	12	11	18

2) a)

	10	20	30	40
−10	0	10	20	
−20	−10	0	10	20
−30	−20	−10	0	10
17	27	37	47	57

b)

	20	10	80	−10
30	50	40	110	20
20	40	30	100	10
10	30	20	90	0
−33	−13	−23	47	−43

427. Таких таблиц много. Один из возможных вариантов:

1) a)

	1	2	3
10	11	12	13
5	6	7	8
25	26	27	28

b)

	20	10	80
50	70	60	130
20	40	30	100
30	50	40	110

2) a)

	1	2	3	4
10	11	12	13	14
2	3	4	5	6
11	12	13	14	15
4	5	6	7	8

b)

	20	30	40	50
30	50	60	70	80
10	30	40	50	60
50	70	80	90	100
70	90	100	110	120

429. 1)

8	−1	13
3	−6	8
12	3	17

2)

−13	9	12
5,5	27,5	30,5
−10	12	15

3)

18	2,3	25
1	−14,7	8
−2	−17,7	5

4)

−5	−4,1	−1,1
2,1	3	6
1,1	2	5

430. 1)

248	259	300	222
129	140	181	103
6	17	58	−20
263	274	315	237

2)

5	14	21	12
−5	4	11	2
10	19	26	17
3	12	19	10

431. 1) Да; 2) Нет; 3) Нет, тройки с числом 1,5 отличаются от остальных троек; 4) Да. **432.** 1) Нет; 2) Да; 3) Да; 4) Нет, тройки с числом −40 отличаются от остальных троек. **434.** 1) $15 \cdot 4 \cdot 12 = 720$; $20 \cdot 6 \cdot 6 = 720$; $30 \cdot 3 \cdot 8 = 720$. 2) $5 \cdot 42 \cdot 24 = 5040$; $7 \cdot 72 \cdot 10 = 5040$; $12 \cdot 30 \cdot 14 = 5040$. **435.** Отношение чисел из 1-ой строки к числам из 2-ой строки равно 5, отношение чисел из 3-ей строки к числам из 2-ой строки равно 2. Отношение чисел из 1-го столбца к числам из 2-го столбца равно 0,75, отношение чисел из 3-го столбца к числам из 2-го столбца равно 1,5. **436.** Отношение чисел из 2-ой строки к числам из 1-ой строки равно 6, отношение чисел из 2-ой строки к числам из 3-ей строки равно 3. Отношение чисел из 2-го столбца к числам из 1-го столбца равно 1,4, отношение чисел из 3-го столбца к числам из 1-го столбца равно 2,4.

437. 1)

8	32	5
4	16	2,5
12	48	7,5

2)

1,2	1,6	2
6	8	10
9	12	15

3)

18	3	−9
36	6	−18
2,4	0,4	−1,2

4)

−5	−100	−25
40	800	200
0,1	2	0,5

438. Таких таблиц много. Один из возможных вариантов:

1) a)

	5	0,2
−2	−10	−0,4
3,5	17,5	0,7

b)

	2	0,5
8	16	4
0,2	0,4	0,1

2) a)

	0,5	20	5
4	2	80	20
0,1	0,05	2	0,5
2,5	1,25	50	12,5

b)

	2,5	4	0,1
1	2,5	4	0,1
3	7,5	12	0,3
4	10	16	0,4

439. Таких таблиц много. Один из возможных вариантов:

1) a)

	5	0,2
2	10	0,4
23	115	4,6

b)

	2	0,5
−7	−14	−3,5
0,3	0,6	0,15

2) a)

	0,5	20	2
4	2	80	8
0,1	0,05	2	0,2
5	2,5	100	10

b)

	2,5	4	0,3
0,25	0,625	1	0,075
2	5	8	0,6
4	10	16	1,2

440. 1)

8	−16
3	−6

2)

10	−12
2,5	−3

3)

18	36
4	8

4)

−5	12
−12,5	30

441. 1)

1,8	−3,6	4,8
3	−6	8
12	−24	32

2)

−8	9,6	12
−4	4,8	6
−10	12	15

3)

18	4,5	144
1	0,25	8
−2	−0,5	−16

4)

−6	−8	−20
2,25	3	7,5
1,5	2	5

445. a) да; b) да.

447. a)

6^9	6^{15}
6^5	6^{11}

c)

7^6	7^6	7^2
7^4	7^7	7^{10}
7^{11}	7^{11}	7^7

b)

8^3	8^7
8^5	8^9

d)

3^{11}	3^9	3^{10}
3^{16}	3^{15}	3^8
3^{12}	3^{10}	3^{12}

448. a)

10^5	10^{21}
10^{16}	10^{32}

c)

9^1	9^3	9^{10}
9^5	9^7	9^{14}
9^3	9^5	9^{12}

b)

$1,6^2$	$1,6^5$
$1,6^4$	$1,6^7$

d)

4^{14}	4^9	4^{11}
4^{18}	4^{13}	4^{15}
4^{11}	4^6	4^8

1. a) Слагательная. Волшебное число 2.
b) Умножательная. Волшебное число 3.
c) Умножательная. Волшебное число 144.
d) Слагательная. Волшебное число 25.
e) Слагательная. Волшебное число −1.
f) Умножательная. Волшебное число 96.
g) Слагательная. Волшебное число 9.
h) Умножательная. Волшебное число 500.

2. a)

85	60
−17	−42

c)

228	30	−15
240	42	−3
231	33	−12

b)

−52	62,4
1,3	−9,1

d)

12,3	15	7,8
6,3	9	1,8
21	23,7	16,5

3. a)

85	60
−17	−12

c)

210	30	−15
42	6	−3
231	33	16,5

b)

−52	364
1,3	−9,1

d)

10,5	15	3
6,3	9	1,8
21	30	6

4. a)

−0,12	0,48
15	−60

c)

0,25	−2
−1,5	12

b)

1,5	2,4
−20	−32

d)

−0,065	13
0,3	−60

5. Таких представлений много. Один из возможных вариантов:
a) $-72 = -20 + (-30) + (-40) + 18$;
b) $0{,}47 = -2 + (-3) + (-4) + 9{,}47$;
c) $-1{,}5 = -1 + (-2) + (-3) + 4{,}5$.

6. Таких представлений много. Один из возможных вариантов:
a) $1{,}2 = -20 + (-30) + 40 + 10 + 1 + 0{,}2$;
b) $-23 = -20 + (-30) + 40 + 10 + 3 + 20$;
c) $-0{,}03 = -20 + (-32) + 40 + 10 + 1 + 0{,}97$.

7. Таких представлений много. Один из возможных вариантов:
a) $-72 = 5 \cdot 0{,}2 \cdot 36 \cdot (-2)$;
b) $0{,}49 = 4 \cdot 0{,}25 \cdot 7 \cdot 0{,}07$;
c) $-1{,}5 = 5 \cdot 0{,}2 \cdot 3 \cdot (-0{,}5)$.

8. Таких представлений много. Один из возможных вариантов:
a) $1{,}2 = 5 \cdot 0{,}2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0{,}1$;
b) $-22 = 0{,}5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot (-4) \cdot 0{,}25$;
c) $0{,}36 = 0{,}5 \cdot 2 \cdot 0{,}3 \cdot 1{,}2 \cdot 4 \cdot 0{,}25$.

9. Таких таблиц много. Один из возможных вариантов:

a)

8	−16
−36	−60

13	26
−2	−4

b)

10	−2,38
2,5	−9,88

0,3	−0,2
−0,6	0,4

10. Таких таблиц много. Один из возможных вариантов:

a)

−18	−36	48
−42	−60	24
−60	−78	6

8	2	4
1	0,25	0,5
−72	−18	−36

b)

8	9,6	10,8
3,2	4,8	6
−14,48	12,88	−11,68

4	2,8	0,2
1	0,7	7,5
8	5,6	0,4

A2. Криптография

451. 34 − 21 − 40 + 26 − 34 − 21 − 40 + 30 − 32 = 21
44 + 21 − 38 − 30 + 44 = 21
35 + 21 − 41 = 32

452. КУРИТЬ ВРЕДНО

453. 19,5 − 1 − 26,5 + 12 − 11 − 1 = 15,5
12 − 10,5 − 18 + 10,5 − 13 − 10,5 − 6 =11,5.

454. АЛМАМБЕТ СЫРГАК

455. 17 − 21 − 19 + 1 − 20 + 2 − 13 = 12
19 − 29 − 19,5 + 12 − 20,5 − 13 − 18 = 3

456. КОРОЛЬ ЛИР

1. a) 23 − 49 + 41 + 45 = 30   41 − 38 + 36 + 32 = 30
b) 33 − 52 + 22 − 33 = 52   34 − 36 − 38 + 36 + 28 − 26 − 35 + 36 = 26

2. a) ЮЛЯ ДОБРАЯ
b) ГУЛЬНУР ХУДЕЕТ

3. a) 16 + 1 − 16,5 − 29 = 16   1 − 16 − 10 − 13 = 3
b) 26 + 18 − 15 = 11   12 − 1 − 12 − 1 + 19 − 10 = 17,5

4. a) РОБИНЗОН КРУЗО
b) ДАНИЭЛЬ ДЕФО

А3. Тестовые задания на внимание, логику, сообразительность

1) *c*	11) *b*	21) *d*	31) *e*
2) *c*	12) *f*	22) *c*	32) *f*
3) *c*	13) *f*	23) *d*	33) *a*
4) *c*	14) *d*	24) *b*	34) *e*
5) *e*	15) *d*	25) *e*	35) *b*
6) *d*	16) *f*	26) *f*	36) *d*
7) *d*	17) *d*	27) *d*	37) *e*
8) *a*	18) *c*	28) *d*	38) *e*
9) *a*	19) *b*	29) *b*	39) *a*
10) *c*	20) *e*	30) *c*	40) *c*

СОДЕРЖАНИЕ

От авторов . . . 3
§1. Задачи на повторение . . . 4
§2. Числовая ось. Уравнения с модулем . . . 8
2.1. Числовая ось . . . 8
2.2. Модуль числа как расстояние . . . 9
2.3. Длина отрезка . . . 9
2.4. Абсолютное значение числа (Модуль) . . . 10
2.5. «Отрицательное» расстояние . . . 10
2.6. Денежный долг как отрицательная величина . . . 11
2.7. Определение координат точек по заданному расстоянию . . . 12
2.8. Расстояние до и после встречи . . . 13
2.9. Определение времени по расстоянию . . . 14
2.10. Уравнение с модулем . . . 16
2.11. Углы, образованные пересечением прямых . . . 16
Итоги . . . 21
§3. Прямоугольная система координат на плоскости . . . 22
3.1. Определение координат на плоскости . . . 22
3.2. Координаты точек на плоскости . . . 24
3.3. Определение точек плоскости по их координатам . . . 25
3.4. Система координат и карта Кыргызстана . . . 27
3.5. Площадь прямоугольника . . . 29
3.6. Площадь прямоугольного треугольника . . . 30
3.7. Площадь многоугольника со сторонами, параллельными осям . . . 31
3.8. Площадь треугольника . . . 32
3.9. Площадь четырёхугольника . . . 33
3.10. Площадь произвольного треугольника . . . 34
3.11. Площадь многоугольника . . . 35
3.12. Вычисление площади прямоугольника по его периметру . . . 36
Итоги . . . 38
§4. Прямо пропорциональная зависимость. Пропорции . . . 40
4.1. Связь между расстоянием и временем . . . 40
4.2. Связь между расстоянием и скоростью . . . 40
4.3. Связь между работой и временем . . . 41
4.4. Экономия от утепления окон . . . 42
4.5. Прямо пропорциональная зависимость . . . 43
4.6. Пропорция . . . 45
4.7. Простейшее уравнение в виде пропорции . . . 46
4.8. Уравнение в виде пропорции . . . 47
4.9. Прямо пропорциональная зависимость и пропорция . . . 48
4.10. Пропорция и прямо пропорциональная зависимость . . . 49
4.11. Обратно пропорциональная зависимость . . . 52
4.12. Проценты . . . 53
Итоги . . . 56
§5. Смеси . . . 58
5.1. Определение количества коз . . . 58
5.2. Определение цены картофеля . . . 58
5.3. Определение цены карамели . . . 59
5.4. Определение необходимого количества семян . . . 59
5.5. Определение количества монет в копилке . . . 60

5.6. Определение необходимого объёма раствора соли 60
5.7. Определение необходимого объёма воды 61
5.8. Определение необходимого объёма масла 61
5.9. Определение объёма раствора низкой концентрации 62
5.10. Добавление монет в копилку 63
5.11. Введение в линейные уравнения с двумя неизвестными 63
Итоги 67
§6. Простейшие системы линейных уравнений. 69
6.1. Введение в системы линейных уравнений 69
6.2. Системы на разность значений неизвестных. 70
6.3. Системы на сумму значений неизвестных 71
6.4. Задача на разрезание. 71
6.5. Система уравнений, связанная с суммой 72
6.6. Баллы за тест 73
6.7. Деньги в остатке 74
6.8. Квадрат и другие фигуры 75
6.9. Площади поверхностей параллелепипеда. 76
6.10. Определение прибыли 77
6.11. Решение задач на смеси при помощи систем. .78
6.12. Определение необходимых объёмов растворов 79
Итоги 81
§7. Свойства позиционной системы записи натуральных чисел. 83
7.1. Выполняя домашнее задание. 83
7.2. Определение цифр двузначного числа. 84
7.3. Определение цифр трёхзначного числа 84
7.4. Нахождение двузначного числа. 85
7.5. Нахождение трёхзначного числа 86
7.6. От двузначного числа к трёхзначному. 87
7.7. От двузначного числа к четырёхзначному. 87
7.8. От трёхзначного числа к трёхзначному. 88
7.9. От двузначного числа к цифре. 89
7.10. От трёхзначного числа к двузначному 89
Итоги 91
§8. Делимость чисел 93
8.1. Определение делимости 93
8.2. Теорема о делимости 93
8.3. Делимость на 2 95
8.4. Свойства чётных и нечётных чисел. 96
8.5. Деление с остатком. 98
8.6. Делимость на 5 99
8.7. Делимость на 4 и на 25 100
8.8. Делимость на 3 и на 9 102
8.9. Использование признаков делимости на 3 и 9 103
8.10. Ошибка при определении делимости 104
8.11. Использование признаков делимости на 9 и 4 105
8.12. Использование признаков делимости на 9, 5 и 25 106
Итоги 109
§9. Разложение натуральных чисел на множители. НОК. 111
9.1. Простые и составные числа 111
9.2. Решето Эратосфена 112
9.3. Разложение на простые множители 113
9.4. Одно числовое данное является множителем другого 114

9.5. НОК . . . 114
9.6. Определение времени на совместную работу . . . 117
9.7. Определение частного времени по заданному времени совместной работы . . . 117
9.8. Определение частного времени по части времени на совместную работу . . . 118
9.9. Задачи на совместную работу трёх субъектов . . . 119
9.10. Определение совместной работы по парным данным . . . 120
9.11. Определение частного времени по совместной работе троих . . . 121
9.12. Оптимизация момента замены . . . 122
Итоги . . . 123
§ 10. Равенство обыкновенных дробей. НОД . . . 125
10.1. Равносильность дробей . . . 125
10.2. Проверка равенства дробей . . . 126
10.3. НОК через набор множителей . . . 128
10.4. НОК через объединение множителей . . . 129
10.5. НОД как пересечение множителей . . . 130
10.6. Распределение заработка . . . 131
10.7. Деление в заданном отношении . . . 133
10.8. Сокращение дробей . . . 133
Итоги . . . 135
§ 11. Действия над обыкновенными дробями . . . 136
11.1. Правильные и неправильные дроби . . . 136
11.2. Умножение обыкновенных дробей . . . 137
11.3. Деление обыкновенных дробей . . . 138
11.4. Сравнение дробей с одинаковыми знаменателями . . . 139
11.5. Сравнение дробей с одинаковыми числителями . . . 140
11.6. Сумма и разность дробей с одинаковыми знаменателями . . . 141
11.7. Сумма и разность обыкновенных дробей . . . 142
11.8. Смешанные дроби . . . 143
11.9. Операции со смешанными дробями . . . 145
11.10. Отработка техники вычислений с дробями . . . 146
11.11. Блочный принцип вычислений . . . 147
11.12. Использование блочного принципа для решения уравнений . . . 148
Итоги . . . 150
§ 12. Степени. Абсолютная и относительная погрешность . . . 151
12.1. Степень числа . . . 151
12.2. Произведение степенных выражений . . . 152
12.3. Нулевая степень. Степень степени . . . 153
12.4. Погрешность . . . 155
Итоги . . . 157
§ 13. Задачи на составление уравнений . . . 158
13.1. Проверка корня уравнения . . . 158
13.2. Решение уравнений с дробными коэффициентами . . . 159
13.3. Задачи на составление уравнений с дробными коэффициентами . . . 162
13.4. Определение стоимости покупки . . . 163
13.5. Определение цены . . . 163
13.6. Определение количества книг . . . 164
13.7. Определение веса винограда . . . 165
13.8. Определение числа элементов множества . . . 166
13.9. Определение числа пятёрок за год . . . 168
13.10. Число книг в шкафах . . . 168

13.11. Определение дроби по её числителю и знаменателю 169
13.12. Деление в заданном отношении. 170
13.13. Деление на три части в заданных отношениях. 171
13.14. Определение стороны треугольника через его периметр 172
13.15. Площадь и периметр прямоугольника 173
Итоги 174
§ 14. Средние значения: среднее арифметическое. Мода. Медиана 176
14.1. Введение. 176
14.2. Определение среднего арифметического 176
14.3. Среднее арифметическое двух чисел. 179
14.4. Среднее арифметическое трёх чисел. 180
14.5. Определение числа по среднему арифметическому. 180
14.6. Алгебраическое определение числа по среднему арифметическому . . 181
14.7. Использование среднего арифметического для определения веса . . . 181
14.8. Изменение среднего арифметического 182
14.9. Средневзвешенное значение. 183
14.10. Сравнение средних арифметических 184
14.11. Различные средние показатели 185
14.12. Медиана для нечётного числа элементов. 186
14.13. Медиана для чётного числа элементов. 187
14.14. Мода 188
14.15. Мода и медиана 189
14.16. Вычисление средних величин 190
Итоги 193
§ 15. Организация данных 196
15.1. Частотные таблицы 196
15.2. Групповая частотная таблица 196
15.3. Гистограммы. 197
15.4. Построение гистограммы 198
15.5. Полигоны 199
15.6. Круговые диаграммы. 201
Итоги 202
§ 16. Окружность. Круг. Сектор 204
16.1. Длина окружности и площадь круга. 204
16.2. Длина окружности и площадь круга. Приложения 206
16.3. Круговой сектор. 206
Итоги 208
Материалы для самостоятельной работы 209
А1. Волшебная таблица 209
А2. Криптография 235
А3. Тестовые задания на внимание, логику, сообразительность. 240
Ответы к упражнениям. 248

Кыдыралиев Сыргак Капарович
Урдалетова Анаркуль Бурганаковна
Дайырбекова Гульнара Мелисовна

МАТЕМАТИКА

Учебник для 6 класса школ
с русским языком обучения

Редактор *В. А. Грибинюк*
Технический редактор *В. А. Грибинюк*
Художественный редактор *Н. Джумакалиев*
Корректор *А. А. Локтионова*
Дизайн обложки *Н. Борисова*
Компьютерная вёрстка *С. Ю. Дранников*

Подписано в печать 19.07.2018 г.
Печать офсетная. Бумага офсетная.
Формат 70 x 100 $^{1}/_{16}$. Гарнитура Arial. Объём 17,5 п. л.
Тираж 43 700 экз. Заказ № 218.

Издательская подготовка осуществлена
ОсОО «Издательство Аркус»
720016, Кыргызская Республика,
г. Бишкек, ул. Самойленко, 7 В

Отпечатано в типографии